

Dos campos às partículas

Vamos partir do formalismo Lagrangeano para campos como a base de nossa descrição da Física de partículas. O Lagrangeano será visto como o objeto a ser construído, devido à sua invariância perante as simetrias pertinentes, que estabelece restrições sobre suas formas possíveis. A partir desta constatação, desenvolveremos uma abordagem centrada em um ponto de vista *funcional* que irá nos permitir avançar rapidamente na definição dos objetos teóricos importantes para a análise da dinâmica dos sistemas de partículas. Iremos centrar nossa análise no campo escalar real, para evitar complicações desnecessárias a uma primeira abordagem dos tópicos em questão.

1 O campo definido através das equações de movimento

A equação de campo para um campo escalar real pode ser obtida de um princípio de ação. É fácil ver que a ação

$$S[\phi] \equiv \int d^4x \mathcal{L} = \int d^4x \left(\frac{1}{2} (\partial_\mu \phi) (\partial^\mu \phi) - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \right)$$

é a única (a menos de uma constante multiplicativa e de uma quadridivergência de uma função escalar) que produz a equação de Klein-Gordon. A partir dela, encontramos o momentum canonicamente conjugado

$$\pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}(x)} = \dot{\phi}(x)$$

e calculamos os parêntesis de Poisson básicos (em tempos iguais)

$$\{\phi(x), \pi(y)\} \delta(x^0 - y^0) = \int d^4z \left(\frac{\delta \phi(x)}{\delta \phi(z)} \frac{\delta \pi(y)}{\delta \pi(z)} - \frac{\delta \pi(y)}{\delta \phi(z)} \frac{\delta \phi(x)}{\delta \pi(z)} \right) = \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \delta(x^0 - y^0).$$

A quantização do sistema clássico acima envolve a correspondência entre a grandeza clássica A e um operador A (resp. B) e a proposição da álgebra

$$\{A, B\} \rightarrow \frac{1}{i} [A, B].$$

A equação de movimento do sistema acima é equação de Klein-Gordon

$$(\square + m^2) \phi(x) = 0.$$

Ao quantizarmos o sistema, seguindo o esquema proposto acima, a equação de Klein-Gordon será também a equação de Heisenberg para o operador de campo $\phi(x)$. Partindo desta equação, podemos obter uma expressão para $\phi(x)$ em termos de operadores de criação e aniquilação, que é o ponto de partida para definir uma teoria consistente para partículas de spin 0. Vamos precisar, para isso, das relações de comutação canônicas, obtidas da correspondência com os parênteses de Poisson clássicos.

$$\begin{aligned} [\phi(x^0, \mathbf{x}), \pi(x^0, \mathbf{y})] &= i\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \\ [\phi(x^0, \mathbf{x}), \phi(x^0, \mathbf{y})] &= i\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \\ [\pi(x^0, \mathbf{x}), \pi(x^0, \mathbf{y})] &= i\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \end{aligned}$$

De fato, dado que a equação de Klein-Gordon é linear, soluções particulares para ela podem ser escritas como

$$\phi_p(x) = a(\mathbf{p}) e^{-ip \cdot x}, \quad \tilde{a}(\mathbf{p}) e^{ip \cdot x}$$

com os parâmetros p sujeitos à condição

$$-p_\mu p^\mu + m^2 = 0.$$

Esta condição deixa apenas 3 parâmetros independentes, p_1 , p_2 e p_3 , em termos dos quais expressamos $p_0 > 0$:

$$p_0 = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}.$$

A solução geral, é

$$\phi(x) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} 2\pi \delta(p^2 - m^2) \theta(p^0) \left(a(\mathbf{p}) e^{-ip \cdot x} + \tilde{a}(\mathbf{p}) e^{ip \cdot x} \right).$$

Impondo a condição de realidade, $\phi^\dagger(x) = \phi(x)$, observamos que $\tilde{a}(\mathbf{p}) = a^\dagger(\mathbf{p})$. Tomamos p^0 como variável dependente e integramos a delta usando a fórmula

$$\delta(f(p^0)) = \frac{1}{\sqrt{(\vec{p})^2 - m^2}} \delta\left(p^0 - \sqrt{(\vec{p})^2 - m^2}\right) + \frac{1}{\sqrt{(\vec{p})^2 - m^2}} \delta\left(p^0 + \sqrt{(\vec{p})^2 - m^2}\right).$$

Com isso, obtemos

$$\phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p}{2p^0} \left(a(\mathbf{p}) e^{-ip \cdot x} + a^\dagger(\mathbf{p}) e^{ip \cdot x} \right),$$

e

$$\pi(x) = \dot{\phi}(x) = -\frac{i}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p}{2} \left(a(\mathbf{p}) e^{-ip \cdot x} - a^\dagger(\mathbf{p}) e^{ip \cdot x} \right),$$

onde o fator $(2\pi)^{-3}$ foi introduzido por conveniência posterior (mas atenção: a expressão do campo é essencialmente uma transformada de Fourier dos operadores $a(\mathbf{p})$ e $a^\dagger(\mathbf{p})$ em relação ao momentum; este fator é mais do que esperado!). No entanto, os operadores $a(\mathbf{p})$ e $a^\dagger(\mathbf{p})$ ainda estão indeterminados. Para obtê-los, substituímos as expressões de $\phi(x)$ e $\dot{\phi}(x)$ na relação de comutação entre eles em tempos iguais. Como resultado, obtemos

$$\begin{aligned} [a_0(\mathbf{p}), a_0^\dagger(\mathbf{p}')] &= (2\pi)^3 2p^0 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{p}'), \\ [a_0(\mathbf{p}), a_0(\mathbf{p}')] &= [a_0^\dagger(\mathbf{p}), a_0^\dagger(\mathbf{p}')] = 0. \end{aligned}$$

2 Funções de Green e funcional gerador

As equações de movimento obtidas da maneira acima são completamente equivalentes às equações de Heisenberg

$$\begin{aligned} \dot{\phi}(x) &= \frac{1}{i} [\phi(x), H], \\ \dot{\pi}(x) &= \frac{1}{i} [\pi(x), H], \end{aligned}$$

que, por sua vez, são satisfeitas pelos campos interagentes

$$\phi(x) = e^{iVt} \phi_0(x) e^{-iVt},$$

em termos dos quais fomos capazes de expressar os elementos da matriz S , através da fórmula de redução. O campo ϕ_0 é um campo livre, satisfazendo à equação de Heisenberg na ausência de interação, gerada pela Hamiltoniana H_0 ,

$$\dot{\phi}_0(x) = \frac{1}{i} [\phi_0(x), H_0].$$

Os campos interagentes são usados para construir as funções de Green,

$$G_m(x_1, \dots, x_m) = \langle 0 | T(\phi(x_1) \dots \phi(x_m)) | 0 \rangle,$$

que são os elementos-chave para a construção da matriz S , como vimos no capítulo anterior. O cálculo dessas funções envolve, então, a solução exata das equações de Heisenberg interagentes, o que, atualmente, parece fora de alcance.

Uma estratégia alternativa consiste na definição de um objeto associado às funções de Green, o *funcional gerador*

$$\begin{aligned} Z[j] &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{i^m}{m!} \int d^4x_1 \dots d^4x_m j(x_1) \dots j(x_m) G_m(x_1, \dots, x_m) \\ &= \langle 0 | T \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{i^m}{m!} \int d^4x_1 \dots d^4x_m j(x_1) \phi(x_1) \dots j(x_m) \phi(x_m) \right) | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | T \left[\exp \left(i \int d^4x j(x) \phi(x) \right) \right] | 0 \rangle. \end{aligned}$$

Podemos obter todas as funções de Green da teoria aplicando derivadas funcionais em relação a $j(x)$ sobre $Z[j]$, como abaixo

$$\begin{aligned} G_m(x_1, \dots, x_m) &= \langle 0 | T(\phi(x_1) \dots \phi(x_m)) | 0 \rangle \\ &= \left(\frac{1}{i} \right)^m \frac{\delta^m}{\delta j(x_1) \dots \delta j(x_m)} Z[j] \Big|_{j=0}. \end{aligned}$$

É preciso, para prosseguir, encontrar um método para cancelar $Z[j]$. Isto é o que faremos na seção seguinte.

3 A construção de Symanzik

Vamos definir o operador

$$E(x'_0, x_0) := T \left[\exp \left(i \int_{x_0}^{x'_0} dy^0 \int d^3\mathbf{y} j(y^0, \mathbf{y}) \phi(y^0, \mathbf{y}) \right) \right].$$

Podemos ver que, para $x_0 < z_0 < x'_0$,¹

$$\begin{aligned}
E(x'_0, x_0) &= T \left[\exp \left(i \int_{x_0}^{z_0} dy^0 \int d^3 y j(y^0, \mathbf{y}) \phi(y^0, \mathbf{y}) + i \int_{z_0}^{x'_0} dy^0 \int d^3 y j(y^0, \mathbf{y}) \phi(y^0, \mathbf{y}) \right) \right] \\
&= T \left[\exp \left(i \int_{z_0}^{x'_0} dy^0 \int d^3 y j(y^0, \mathbf{y}) \phi(y^0, \mathbf{y}) \right) \right] \\
&\times T \left[\exp \left(i \int_{x_0}^{z_0} dy^0 \int d^3 y j(y^0, \mathbf{y}) \phi(y^0, \mathbf{y}) \right) \right] \\
&= E(x'_0, z_0) E(z_0, x_0).
\end{aligned}$$

Desta forma,

$$Z[j] = \langle 0 | E(\infty, -\infty) | 0 \rangle = \langle 0 | E(\infty, x^0) E(x^0, -\infty) | 0 \rangle.$$

Assim, para um $x^\mu = (x^0, \mathbf{x})$,

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta j(x)} \right)^p Z[j] &= \langle 0 | T \left(\phi(x)^p \exp \left(i \int d^4 y j(y^0, \mathbf{y}) \phi(y^0, \mathbf{y}) \right) \right) | 0 \rangle \\
&= \langle 0 | E(\infty, x^0) \phi(x)^p E(x^0, -\infty) | 0 \rangle.
\end{aligned}$$

¹Uma maneira de entender melhor esta fórmula é supor que estejamos considerando um operador

$$T(e^{A+B})$$

onde, embora A não necessariamente comute com B , T faça com que B atue sempre depois que A . Assim,

$$\begin{aligned}
T(e^{A+B}) &= T \left(1 + (A+B) + \frac{1}{2!} (A+B)^2 + \frac{1}{3!} (A+B)^3 + \dots \right) \\
&= T \left(1 + (A+B) + \frac{1}{2!} (A^2 + AB + BA + B^2) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{3!} (A^3 + AAB + ABA + BAA + ABB \right. \\
&\quad \left. + BAB + BBA + B^3) + \dots \right) \\
&= 1 + (A+B) + \frac{1}{2!} (TA^2 + 2BA + TB^2) \\
&\quad + \frac{1}{3!} (TA^3 + 3BTA^2 + 3TB^2A + TB^3) + \dots \\
&= Te^B Te^A.
\end{aligned}$$

Vamos usar as propriedades acima para estabelecer uma equação diferencial funcional para $Z[j]$. Para isto, consideramos as equações de Heisenberg para o campo escalar na presença de uma interação $V(\phi)$,

$$0 = \langle 0 | E(\infty, x^0) \{ (\square_x + m^2) \phi(x) + V'(\phi(x)) \} E(x^0, -\infty) | 0 \rangle.$$

Podemos retirar as derivadas espaciais do valor esperado, assim como transformar o operador de campo em derivadas funcionais agindo do lado de fora,

$$\begin{aligned} 0 &= (-\nabla^2 + m^2) \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta j(x)} \right) + V' \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta j(x)} \right) Z[j] \\ &+ \langle 0 | E(\infty, x_0) \{ \partial_0^2 \phi(x) \} E(x_0, -\infty) | 0 \rangle \\ &= (\partial_0^2 - \nabla^2 + m^2) \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta j(x)} \right) + V' \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta j(x)} \right) Z[j] \\ &+ \langle 0 | E(\infty, x_0) \{ \partial_0^2 \phi(x) \} E(x_0, -\infty) | 0 \rangle \\ &- \partial_0^2 \langle 0 | E(\infty, x_0) \phi(x) E(x_0, -\infty) | 0 \rangle. \end{aligned}$$

O primeiro termo recompõe a forma original das equações de movimento, com $\phi(x)$ substituído pelo operador $\frac{1}{i} \delta / \delta j(x)$ atuando em $Z[j]$. Vamos trabalhar um pouco a diferença entre o segundo e o terceiro termos. Para isto, notamos que

$$\begin{aligned} \partial_0 \langle 0 | E(\infty, x^0) \phi(x) E(x^0, -\infty) | 0 \rangle &= \langle 0 | (\partial_0 E(\infty, x^0)) \phi(x) E(x^0, -\infty) | 0 \rangle \\ &+ \langle 0 | E(\infty, x^0) (\partial_0 \phi(x)) E(x^0, -\infty) | 0 \rangle + \langle 0 | E(\infty, x^0) \phi(x) (\partial_0 E(x^0, -\infty)) | 0 \rangle. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \partial_0 E(\infty, x^0) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} (E(\infty, x^0 + \varepsilon) - E(\infty, x^0)) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} (E(\infty, x^0 + \varepsilon) - E(\infty, x^0 + \varepsilon) E(x^0 + \varepsilon, x^0)) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} E(\infty, x^0 + \varepsilon) (1 - E(x^0 + \varepsilon, x^0)). \end{aligned}$$

Notando que

$$\begin{aligned} E(x^0 + \varepsilon, x^0) &= T \exp \left(i \int_{x^0}^{x^0 + \varepsilon} dy^0 \int d^3 y j(y^0, \mathbf{y}) \phi(y^0, \mathbf{y}) \right) \\ &\approx T \exp \left(i \varepsilon \int d^3 y j(x^0, \mathbf{y}) \phi(x^0, \mathbf{y}) \right) \\ &\approx 1 + i \varepsilon \int d^3 y j(x^0, \mathbf{y}) \phi(x^0, \mathbf{y}), \end{aligned}$$

obtemos, no limite em que $\varepsilon \rightarrow 0$,

$$\partial_0 E(\infty, x^0) = -i E(\infty, x^0) \left(\int d^3 y j(x^0, \mathbf{y}) \phi(x^0, \mathbf{y}) \right).$$

Similarmente,

$$\partial_0 E(x^0, -\infty) = i \left(\int d^3 y j(x^0, \mathbf{y}) \phi(x^0, \mathbf{y}) \right) E(x^0, -\infty).$$

Assim,

$$\begin{aligned} & \langle 0 | (\partial_0 E(\infty, x^0)) \phi(x) E(x^0, -\infty) | 0 \rangle \\ &= -i \int d^3 y j(x^0, \mathbf{y}) \langle 0 | E(\infty, x^0) \phi(x^0, \mathbf{y}) \phi(x) E(x^0, -\infty) | 0 \rangle, \\ & \langle 0 | E(\infty, x^0) \phi(x) (\partial_0 E(x^0, -\infty)) | 0 \rangle \\ &= i \int d^3 y j(x^0, \mathbf{y}) \langle 0 | E(\infty, x^0) \phi(x) \phi(x^0, \mathbf{y}) E(x^0, -\infty) | 0 \rangle. \end{aligned}$$

Como $[\phi(x_0, \mathbf{x}), \phi(x_0, \mathbf{y})] = 0$, estes dois termos se cancelam e obtemos finalmente

$$\begin{aligned} \partial_0 \langle 0 | E(\infty, x^0) \phi(x) E(x^0, -\infty) | 0 \rangle &= \langle 0 | E(\infty, x^0) (\partial_0 \phi(x)) E(x^0, -\infty) | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | E(\infty, x^0) \pi(x^0, \mathbf{x}) E(x^0, -\infty) | 0 \rangle. \end{aligned}$$

Atuando mais uma vez com ∂_0 , obtemos

$$\begin{aligned} & \partial_0^2 \langle 0 | E(\infty, x^0) \phi(x) E(x^0, -\infty) | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | (\partial_0 E(\infty, x^0)) \pi(x) E(x^0, -\infty) | 0 \rangle + \langle 0 | E(\infty, x^0) (\partial_0 \pi(x)) E(x^0, -\infty) | 0 \rangle \\ &+ \langle 0 | E(\infty, x^0) \pi(x) (\partial_0 E(x^0, -\infty)) | 0 \rangle \\ &= -i \int d^3 y j(x^0, \mathbf{y}) \langle 0 | E(\infty, x^0) \phi(x^0, \mathbf{y}) \pi(x^0, \mathbf{x}) E(x^0, -\infty) | 0 \rangle \\ &+ \langle 0 | E(\infty, x^0) (\partial_0^2 \phi(x)) E(x^0, -\infty) | 0 \rangle \\ &+ i \int d^3 y j(x_0, \mathbf{y}) \langle 0 | E(\infty, x^0) \pi(x^0, \mathbf{x}) \phi(x^0, \mathbf{y}) E(x^0, -\infty) | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | E(\infty, x^0) (\partial_0^2 \phi(x)) E(x^0, -\infty) | 0 \rangle \\ &- i \int d^3 y j(x^0, \mathbf{y}) \langle 0 | E(\infty, x^0) [\phi(x^0, \mathbf{y}), \pi(x^0, \mathbf{x})] E(x^0, -\infty) | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | E(\infty, x_0) (\partial_0^2 \phi(x)) E(x_0, -\infty) | 0 \rangle + j(x) \langle 0 | E(\infty, x^0) E(x^0, -\infty) | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | E(\infty, x_0) (\partial_0^2 \phi(x)) E(x_0, -\infty) | 0 \rangle + j(x) Z[j]. \end{aligned}$$

Com isto, obtemos nossa equação diferencial funcional para $Z[j]$,

$$\left\{ (\square_x + m^2) \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta j(x)} \right) + V' \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta j(x)} \right) - j(x) \right\} Z[j] = 0.$$

Lembrando a origem das equações de Heisenberg (generalização quântica de equações clássicas obtidas através de um princípio de ação) podemos escrever a equação acima numa forma mais geral

$$\left\{ \frac{\delta S[\phi]}{\delta \phi(x)} \Big|_{\phi = \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta j(x)}} + j(x) \right\} Z[j] = 0.$$

Derivando funcionalmente estas equações em relação a $j(x_1), j(x_2), \dots$, e fazendo os j iguais a zero no final, obtemos um conjunto infinito de equações diferenciais parciais para as funções de Green. Elas são chamadas de *equações de Dyson-Schwinger* e são o equivalente funcional das equações de Heisenberg. O problema dinâmico pode ser formulado agora como a tarefa de resolver equações diferenciais funcionais e obter $Z[j]$.

4 A solução perturbativa e as regras de Feynman

Como sempre ocorre, a solução deste problema não é conhecida fora da teoria de perturbações. Para obter uma solução perturbativa, vamos inicialmente considerar o problema livre

$$\left\{ (\square_x + m^2) \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta j(x)} \right) - j(x) \right\} Z_0[j] = 0.$$

A solução será simples se conseguirmos inverter o operador $K(x, y) = (\square_x + m^2) \delta(x - y)$:

$$\int dz K(x, z) K^{-1}(z, y) = \int dz K^{-1}(x, z) K(z, y) = \delta(x - y).$$

Esta inversa existe e é dada pela integral de Fourier

$$K^{-1}(x, y) = -\Delta_F(x - y) = - \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ip \cdot (x-y)}}{p^2 - m^2 + i\varepsilon}.$$

Multiplicando a equação de Dyson-Schwinger por $K^{-1}(y, x)$ e integrando sobre x ,

$$\begin{aligned} & \left\{ \int d^4x K^{-1}(y, x) (\square_x + m^2) \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta j(x)} \right) - \int d^4x K^{-1}(y, x) j(x) \right\} Z_0[j] \\ &= \left\{ \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta j(y)} \right) - \int d^4x K^{-1}(y, x) j(x) \right\} Z_0[j] = 0 \\ &\Rightarrow \frac{\delta}{\delta j(y)} Z_0[j] = \left(i \int d^4y K^{-1}(y, x) j(x) \right) Z_0[j], \end{aligned}$$

o que nos dá a solução

$$\begin{aligned} Z_0[j] &= C \exp \left(\frac{i}{2} \int d^4x d^4y j(x) K^{-1}(x, y) j(y) \right) \\ &= C \exp \left(-\frac{i}{2} \int d^4x d^4y j(x) \Delta_{\text{F}}(x - y) j(y) \right). \end{aligned}$$

A condição $Z_0[0] = \langle 0|0 \rangle = 1$ nos impõe $C = 1$.

A presença do $+i\varepsilon$ no denominador da expressão para $\Delta_{\text{F}}(x - y)$ refere-se a uma determinada prescrição para contornar os pólos da integral em $p^2 = m^2$. Porém, poderíamos considerar outras prescrições ($\pm\varepsilon$, $-i\varepsilon$, etc.). A equação diferencial funcional sozinha não é capaz de nos informar qual é a prescrição fisicamente correta. A resposta vem do cálculo explícito da função de Green livre de 2 pontos. Esta é dada por

$$\begin{aligned} G_{2,0}(x, y) &= \langle 0|T(\phi_0(x)\phi_0(y))|0\rangle = \left(\frac{1}{i} \right)^2 \frac{\delta^2 Z_0[j]}{\delta j(x)\delta j(y)} \Big|_{j=0} \\ &= \left(\frac{1}{i} \right)^2 \left(-\frac{i}{2} \right) \frac{\delta}{\delta j(x)} \left\{ \left(\int d^4y \Delta_{\text{F}}(y - x) j(y) + \int d^4x' j(x') \Delta_{\text{F}}(x' - y) \right) \right. \\ &\quad \left. \times \exp \left(-\frac{i}{2} \int d^4x' d^4y' j(x') \Delta_{\text{F}}(x' - y') j(y') \right) \right\} \Big|_{j=0} \\ &= \left(\frac{1}{i} \right)^2 \left(-\frac{i}{2} \right) (\Delta_{\text{F}}(y - x) + \Delta_{\text{F}}(x - y)) = i\hbar \Delta_{\text{F}}(x - y), \end{aligned}$$

onde a última passagem se justifica em função da simetria manifesta de $\Delta_{\text{F}}(x - y) = \Delta_{\text{F}}(y - x)$. Por outro lado, a mesma função de Green pode ser calculada explicitamente através da solução das equações de Heisenberg

para campos livres

$$\phi_0(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2p^0} \left(a_0(\mathbf{p}) e^{-ip \cdot x} + a_0^\dagger(\mathbf{p}) e^{ip \cdot x} \right),$$

com os operadores $a_0(\mathbf{p})$ e $a_0^\dagger(\mathbf{p})$ satisfazendo

$$\begin{aligned} [a_0(\mathbf{p}), a_0^\dagger(\mathbf{p}')] &= (2\pi)^3 2p^0 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{p}'), \\ [a_0(\mathbf{p}), a_0(\mathbf{p}')] &= [a_0^\dagger(\mathbf{p}), a_0^\dagger(\mathbf{p}')] = 0, \end{aligned}$$

e $p^0(\mathbf{p}) = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$, com $p \cdot x = p^0(\mathbf{p})x^0 - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}$. De fato,

$$\begin{aligned} G_{2,0}(x, y) &= \langle 0 | T(\phi_0(x) \phi_0(y)) | 0 \rangle \\ &= \theta(x^0 - y^0) \langle 0 | \phi_0(x) \phi_0(y) | 0 \rangle + \theta(y^0 - x^0) \langle 0 | \phi_0(y) \phi_0(x) | 0 \rangle \\ &= \theta(x^0 - y^0) \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3 2p^0(\mathbf{p}')} \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2p^0(\mathbf{p})} \langle 0 | a_0(\mathbf{p}') e^{-ip' \cdot x} a_0^\dagger(\mathbf{p}) e^{ip \cdot y} | 0 \rangle \\ &\quad + \theta(y^0 - x^0) \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2p^0(\mathbf{p})} \frac{d^3p'}{(2\pi)^{3/2} 2p^0(\mathbf{p}')} \langle 0 | a_0(\mathbf{p}) e^{-ip \cdot y} a_0^\dagger(\mathbf{p}') e^{ip' \cdot x} | 0 \rangle \\ &= \theta(x^0 - y^0) \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2p^0(\mathbf{p})} e^{-ip \cdot (x-y)} + \theta(y^0 - x^0) \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2p^0(\mathbf{p})} e^{ip \cdot (x-y)} \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x}-\mathbf{y})} \left(\frac{\theta(x^0 - y^0) e^{-i \frac{p_0(\mathbf{p})(x^0 - y^0)}{\hbar}} + \theta(y^0 - x^0) e^{i \frac{p_0(\mathbf{p})(x^0 - y^0)}{\hbar}}}{2p^0(\mathbf{p})} \right). \end{aligned}$$

Vamos, agora, usar a representação integral da função degrau

$$\theta(x^0 - y^0) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \frac{e^{-i\tau(x^0 - y^0)}}{\tau + i\varepsilon}.$$

Assim,

$$G_2(x, y) = -i \int \frac{d^3p d\tau}{(2\pi)^4} \frac{e^{i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x}-\mathbf{y})}}{2p^0(\mathbf{p})} \left(\frac{e^{-i(p_0(\mathbf{p})+\tau)(x^0 - y^0)} + e^{i(p_0(\mathbf{p})+\tau)(x^0 - y^0)}}{\tau + i\varepsilon} \right).$$

Fazemos agora uma mudança de variáveis na integral em τ :

$$\begin{aligned} \bar{p}_0 &= p_0(\mathbf{p}) + \tau, \\ d\tau &= d\bar{p}_0 \end{aligned}$$

e, em seguida, fazemos $\bar{p}_0 \rightarrow -\bar{p}_0$ na segunda integral. Observe que \bar{p}_0 é uma variável de integração aqui, não satisfazendo necessariamente $\bar{p}_0^2 = \mathbf{p}^2 + m^2$. Definimos $d^4p = d\bar{p}^0 d^3p$. Obtemos, assim,

$$\begin{aligned}
G_2(x, y) &= i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ip \cdot (x-y)}}{2p^0(\mathbf{p})} \left(\frac{1}{\bar{p}_0 - p_0(\mathbf{p}) + i\varepsilon} + \frac{1}{-\bar{p}_0 - p_0(\mathbf{p}) + i\varepsilon} \right) \\
&= i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ip \cdot (x-y)}}{2p^0(\mathbf{p})} \left(\frac{-2p_0(\mathbf{p}) + 2i\varepsilon}{(\bar{p}_0 - p_0(\mathbf{p}) + i\varepsilon)(-\bar{p}_0 - p_0(\mathbf{p}) + i\varepsilon)} \right) \\
&= -i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip \cdot (x-y)} \left(\frac{1}{(-\bar{p}_0^2 + p_0^2(\mathbf{p}) - 2i\varepsilon\omega(\mathbf{p}))} \right) \\
&= i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip \cdot (x-y)} \left(\frac{1}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} \right) = i\Delta_F(x-y)
\end{aligned}$$

onde cancelamos $2p_0(\mathbf{p}) + 2i\varepsilon$ com $2p_0(\mathbf{p})$ pelo fato de não haver singularidades induzidas por esta operação no limite $\varepsilon \rightarrow 0$ e identificamos $2i\varepsilon p_0(\mathbf{p})$ com $i\varepsilon$ por importar apenas o desvio da singularidade por uma quantidade ε positiva e infinitesimal. Observe também que, na integral acima, $p^2 \equiv (\bar{p}^0)^2 - \mathbf{p}^2 \neq m^2$.

Assim, notamos que a prescrição correta para definir a inversa de $K(x, y)$ tem que ser a adição de $+i\varepsilon$ ao denominador da integral de Fourier; caso contrário, não haverá consistência com o resultado obtido através do cálculo direto da função de Green de 2 pontos. Esta função de Green é também chamada de *causal*, por propagar soluções (da equação de Klein-Gordon) de energia positiva para o futuro e outras, de energia negativa, para o passado (vide Itzykson e Zuber).

Construída a solução para o caso livre, passamos agora à consideração da situação interagente. Vamos propor, para isso, um *ansatz* como solução da equação de Dyson-Schwinger interagente:

$$Z[j] = \frac{1}{N} \exp \left(-i \int d^4y F \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta j(y)} \right) \right) Z_0[j],$$

com N escolhido de modo a normalizar Z , ou seja fazer com que $Z[0] = \langle 0|0 \rangle = 1$. Para substituir esta proposta na equação de Dyson-Schwinger, vamos deduzir uma identidade útil. Suponhamos que A e B são dois operadores que comutam com o seu comutador. Vemos, então, que

$$\begin{aligned}
[A, B^2] &= 2[A, B]B, \\
[A, B^3] &= B[A, B^2] + [A, B]B^2 = 3[A, B]B^2,
\end{aligned}$$

o que nos permite propor a hipótese indutiva

$$[A, B^{n-1}] = (n-1) [A, B] B^{n-2},$$

e provar o resultado para n ,

$$\begin{aligned} [A, B^n] &= B [A, B^{n-1}] + [A, B] B^{n-1} \\ &= n [A, B] B^{n-1}. \end{aligned}$$

Assim, se $F[B]$ tem a expansão em série

$$F[B] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n}{n!} B^n,$$

vemos que

$$\begin{aligned} [A, F[B]] &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n}{n!} [A, B^n] \\ &= [A, B] \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n}{(n-1)!} B^{n-1} \\ &= [A, B] F'[B]. \end{aligned}$$

A partir daí, é fácil ver que, como $F[B]$ também comuta com o $[A, B]$,

$$\begin{aligned} [A, \exp(-iF[B])] &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (-i)^n [A, F^n[B]] \\ &= -i [A, F[B]] \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} (-i)^{n-1} F^{n-1}[B] \\ &= -i [A, B] F'[B] \exp(-iF[B]). \end{aligned}$$

Vamos considerar $A = j(x)$ e $B = \frac{1}{i} \delta / \delta j(y)$. O seu comutador é

$$\left[j(x), \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta j(y)} \right] = i \delta(x-y).$$

Com isso, demonstramos que

$$\left[j(x), \exp\left(-i \int d^4y F\left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta j(y)}\right)\right) \right] = F'\left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta j(x)}\right) \exp\left(-i \int d^4y F\left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta j(y)}\right)\right).$$

Vamos usar esta identidade na equação de Dyson-Schwinger

$$\begin{aligned}
0 &= \left\{ (\square_x + m^2) \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta j(x)} \right) + V' \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta j(x)} \right) - j(x) \right\} \\
&\times \frac{1}{N} \exp \left(-i \int d^4 y F \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta j(y)} \right) \right) Z_0[j] \\
&= \frac{1}{N} \exp \left(-i \int d^4 y F \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta j(y)} \right) \right) \\
&\times \left\{ (\square_x + m^2) \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta j(x)} \right) + V' \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta j(x)} \right) - j(x) \right\} Z_0[j] \\
&- \frac{1}{N} F' \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta j(x)} \right) \exp \left(-i \int d^4 y F \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta j(y)} \right) \right) Z_0[j].
\end{aligned}$$

Vemos que, se $F' = V'$, a equação acima se reduz essencialmente à equação de Dyson-Schwinger para $Z_0[j]$:

$$\exp \left(-i \int d^4 y F \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta j(y)} \right) \right) \left\{ (\square_x + m^2) \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta j(x)} \right) - j(x) \right\} Z_0[j] = 0.$$

Isto nos faz identificar a solução da equação de Dyson-Schwinger interagente como

$$Z[j] = \frac{1}{N} \exp \left(-i \int d^4 y V \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta j(y)} \right) \right) Z_0[j]. \quad (1)$$

Observamos que, se $V(\phi) = \lambda \bar{V}(\phi)$, com $\bar{V}(\phi)$ dependendo exclusivamente de ϕ , a expressão acima nos fornece na verdade uma expansão em potências de λ (simplesmente escrevendo a definição da exponencial). Portanto, a equação (1) é, intrinsecamente, uma solução perturbativa da equação de DS.

5 Um exemplo: a interação ϕ^4

Para ver mais de perto a estrutura desta série perturbativa, vamos realizar explicitamente as operações descritas nesta equação. Vamos escolher um exemplo concreto para trabalhar:

$$V(\varphi) = \frac{\lambda}{4!} \phi^4.$$

Além disso, vamos escolher o exemplo específico da função de Green de 2-pontos, $G_2(x, y)$, para ilustrar o cálculo perturbativo:

$$\begin{aligned}
G_2(x, y) &= \left(\frac{1}{i}\right)^2 \frac{\delta^2 Z[j]}{\delta j(x) \delta j(y)} \Big|_{j=0} \\
&= \frac{1}{N} \left(\frac{1}{i}\right)^2 \frac{\delta^2}{\delta j(x) \delta j(y)} \left[1 - \frac{i\lambda}{4!} \int dx_1 \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta j(x_1)}\right)^4 \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2!} \left(\frac{-i\lambda}{4!}\right)^2 \int dx_1 dx_2 \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta j(x_1)}\right)^4 \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta j(x_2)}\right)^4 + \dots \right] Z_0[j] \Big|_{j=0} \\
&= G_2^{(0)}(x, y) + G_2^{(1)}(x, y) + G_2^{(2)}(x, y) + \dots,
\end{aligned}$$

onde $G_2^{(i)}(x, y)$ depende de λ^i . Vamos calcular cada uma destas contribuições (até primeira ordem):

1. Ordem λ^0 :

$$\begin{aligned}
G_2^{(0)}(x, y) &= \frac{1}{N_0} \left(\frac{1}{i}\right)^2 \frac{\delta^2 Z_0[j]}{\delta j(x) \delta j(y)} \Big|_{j=0} \\
&= \frac{1}{N_0} \left(\frac{1}{i}\right)^2 \left[\frac{\delta^2}{\delta j(x) \delta j(y)} \right. \\
&\quad \times \left(1 - \frac{i}{2} \int dx_1 dy_1 j(x_1) \Delta_F(x_1 - y_1) j(y_1) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2!} \left(-\frac{i}{2}\right)^2 \int dx_1 dy_1 j(x_1) \Delta_F(x_1 - y_1) j(y_1) \right. \\
&\quad \left. \times \int dx_2 dy_2 j(x_2) \Delta_F(x_2 - y_2) j(y_2) + \dots \right) \Big|_{j=0}.
\end{aligned}$$

Vemos que o único termo da expansão de $Z_0[j]$ a contribuir para um resultado não nulo após a corrente ser tomada como nula é o segundo: todos os demais terão j 's sobrando após termos tomado as duas derivadas

funcionais. Assim, explorando o fato de que $\Delta_F(x-y) = \Delta_F(y-x)$,

$$\begin{aligned} G_2^{(0)}(x, y) &= \frac{1}{N_0} \left(\frac{1}{i}\right)^2 \left[\frac{\delta^2}{\delta j(x) \delta j(y)} \Big|_{j=0} \right. \\ &\quad \times \left. \left(-\frac{i}{2} \int dx_1 dy_1 j(x_1) \Delta_F(x_1 - y_1) j(y_1) \right) \right]_{j=0} \\ &= \frac{1}{N_0} \left(\frac{1}{i}\right)^2 [(-i) \Delta_F(x-y)] = \frac{1}{N_0} i \Delta_F(x-y). \end{aligned}$$

O fator N deve ser calculado de modo compatível com a ordem da aproximação que estamos fazendo. Assim, para a aproximação de ordem λ^0 , N_0 deve normalizar Z na mesma aproximação, ou seja, $Z = (N_0)^{-1} Z_0$. Impondo que $Z[0] = 1$, obtemos $N_0 = 1$ nesta ordem e, assim,

$$G_2^{(0)}(x, y) = i \Delta_F(x-y).$$

Observamos que a ação de duas derivadas funcionais sobre o argumento da exponencial de Z_0

$$-\frac{i}{2} \int dx_1 dy_1 j(x_1) \Delta_F(x_1 - y_1) j(y_1)$$

produz o termo

$$i \Delta_F(x-y)$$

Mais de duas derivadas funcionais dariam resultado nulo. Menos de duas dariam um resultado que se anularia quando a corrente fosse tomada como nula. No que segue, vamos fazer as seguintes definições gráficas:

$$\begin{aligned} -\frac{i}{2} \int dx_1 dy_1 j(x_1) \Delta_F(x_1 - y_1) j(y_1) &= \text{---} \\ i \Delta_F(x-y) &= \text{---} \end{aligned}$$

2. Ordem λ^1 :

$$G_2^{(1)}(x, y) = \frac{1}{N_1} \left(\frac{1}{i}\right)^2 \frac{\delta^2}{\delta j(x) \delta j(y)} \left(1 - \frac{i\lambda}{4!} \int dx_1 \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta j(x_1)}\right)^4 \right) Z_0[j] \Big|_{j=0}$$

Temos, portanto, seis derivadas funcionais para atuar sobre $Z_0[j]$. É fácil ver que, na expansão de $Z_0[j]$, apenas o termo de terceira ordem contribuirá. Este termo conterá o produto de três termos do tipo $\times\text{-----}\times$ multiplicado por $1/3!$. Haverá um propagador para cada par de derivadas funcionais que atuar sobre um mesmo termo com correntes. O resultado, então, será:

$$G_2^{(1)}(x, y) = \frac{1}{N_1} \underbrace{\left[\frac{i\lambda}{4!} \right]}_{\text{termo de ordem 1 na expansão de } V} \underbrace{\left(\frac{1}{3!} \frac{1}{2^3} \right)}_{\text{expansão de } Z_0} \int dx_1$$

$$\times \left(\begin{array}{cc} 4! 3! & \begin{array}{c} x \text{-----} y \\ x_1 \text{-----} x_1 \\ x_1 \text{-----} x_1 \end{array} \\ + & 4 4! 3! \begin{array}{c} x \text{-----} x_1 \\ y \text{-----} x_1 \\ x_1 \text{-----} x_1 \end{array} \end{array} \right)$$

Os fatores numéricos que aparecem em frente às linhas de propagadores são calculados levando em consideração quantas opções existem de atuação das derivadas funcionais em cada uma das fontes disponíveis. Por exemplo, no primeiro termo, a primeira derivada funcional a atuar (suponha que seja aquela relativa a $j(x)$) tem 6 opções de correntes para derivar. Para obter a estrutura mostrada, a derivada em relação a $j(y)$ tem apenas uma opção. As 4 derivadas funcionais em relação a x_1 tem $4!$ opções. Os fatores $1/2$ incluídos em cada termo $\times\text{-----}\times$ têm que ser escritos explicitamente porque a contagem que fizemos implicitamente considerou distintas as escolhas de correntes pertencentes ao mesmo termo. Levando em consideração que os pontos x_1 mostrados acima são todos o mesmo ponto, chegamos a uma representação gráfica mais elegante do mesmo resultado:

$$G_2^{(1)}(x, y) = \frac{1}{N_1} (i)^2 \lambda \left(\frac{1}{8} x \text{-----} y \begin{array}{c} \infty \\ x_1 \end{array} + \frac{1}{2} x \text{-----} y \begin{array}{c} \bigcirc \\ x_1 \end{array} \right).$$

Na expressão acima, utilizamos a regra de incluir a integral sobre dx_1 na expressão para o gráfico. O fator N é calculado, na ordem 1, novamente

requerendo que

$$\begin{aligned}
 Z_1 [0] &= \frac{1}{N_1} \left(1 - \frac{i\lambda}{4!} \int dx_1 \left(-i \frac{\delta}{\delta j(x_1)} \right)^4 \right) Z_0 [j] \Big|_{j=0} \\
 &= \frac{1}{N_1} \left(1 - \left[\frac{i\lambda}{4!} \int dx_1 \left(-i \frac{\delta}{\delta j(x_1)} \right)^4 Z_0 [j] \right]_{j=0} \right) \\
 &= 1.
 \end{aligned}$$

Já estamos mais capacitados a calcular o termo entre colchetes agora. O único termo que contribuirá será o termo de segunda ordem na expansão de Z_0 . O resultado será

$$\begin{aligned}
 Z_1 [0] &= \frac{1}{N_1} \left(1 + i\lambda \left[\frac{1}{8} \text{diagram} \right] \right) = 1 \\
 \Rightarrow \frac{1}{N_1} &= 1 - i\lambda \left[\frac{1}{8} \text{diagram} \right],
 \end{aligned}$$

onde usamos que, para $\alpha \ll 1$,

$$\frac{1}{1 + \alpha} = 1 - \alpha + \dots$$

Substituindo na expressão completa de G_2 , até primeira ordem, obte-

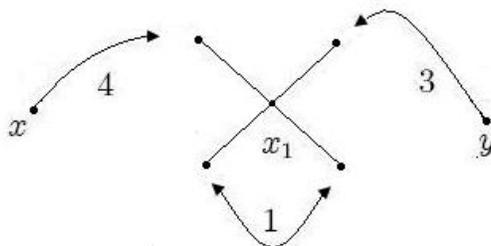
mos

$$\begin{aligned}
G_2(x, y) &= \left(1 - i\lambda \left[\frac{1}{8} \text{diagram} \right] \right) \times \left[i \text{diagram} \right. \\
&\quad \left. + (i)^2 \lambda \left(\frac{1}{8} x \text{diagram} y + \frac{1}{2} x \text{diagram} y \right) \right] \\
&= i \text{diagram} - (i)^2 \lambda \left(\frac{1}{8} x \text{diagram} y \right) \\
&\quad + (i)^2 \lambda \left(\frac{1}{8} x \text{diagram} y + \frac{1}{2} x \text{diagram} y \right) + O(\lambda^2) \\
&= i \text{diagram} + (i)^2 \lambda \left(\frac{1}{2} x \text{diagram} y \right) + O(\lambda^2).
\end{aligned}$$

O fator N tem o papel de cancelar gráficos que envolvam termos em que nenhum propagador se conecte a um ponto externo (no caso da função de dois pontos, x ou y). Esses termos são chamados de *bolhas de vácuo* e pode-se mostrar que são cancelados em todas as ordens em λ .

Em geral, observamos que, dado um termo de interação $\lambda ((-i)^4 \delta^4 / \delta j^4(x_1))$, vão sempre haver quatro propagadores conectados com o ponto x_1 (que representa um ponto que está sendo integrado), obtidos de derivadas funcionais sobre os termos de Z_0 que vão eliminar tantos fatores $1/2$ quantas forem as derivadas. Representamos este termo, graficamente, por quatro linhas saindo do ponto x_1 (e chamamos este conjunto de quatro linhas de *vértice*). Os demais fatores $1/2$ serão eliminados pelas derivadas funcionais associadas aos pontos externos. O fator $1/3!$ (correspondente ao termo de 3ª ordem na expansão de Z_0) representa simplesmente as possibilidades de pareamento das

derivadas funcionais (internas e externas) com os termos da expansão de Z_0 , que contém correntes bilinearmente, e também será sempre cancelado. Isto nos permite calcular os fatores que vão na frente dos gráficos com maior rapidez, simplesmente considerando o pareamento entre as derivadas funcionais externas e os termos que sobraram após parearmos as derivadas que vêm da interação. Observe o exemplo abaixo:



Os números indicam quantas possibilidades de conexão existem entre um dos pontos disponíveis do vértice e os pontos x , y (estamos supondo que primeiro conectamos x (4 possibilidades de conexão com o vértice), depois y (3 possibilidades) e então conectamos entre si os pontos restantes do vértice). Multiplicando os fatores, vemos que temos 12 maneiras de montar este gráfico (o único que sobrevive em primeira ordem, após eliminarmos a bolha de vácuo).

A soma de todos os gráficos possíveis de serem obtidos seguindo as regras acima, para um número n de vértices, representa a contribuição de ordem n em teoria de perturbações para a função de Green desejada. Este conjunto de regras práticas para obter perturbativamente as funções de Green recebe o nome de *regras de Feynman*.

6 Regras de Feynman no Espaço de Momenta

As funções de Green mais convenientes para se relacionarem com a matriz S não são as que aprendemos a calcular na seção anterior e sim as suas transformadas de Fourier. Em geral, as regras de Feynman são formuladas para as funções de Green no espaço de momenta e vamos nos dedicar a este tópico, nesta seção.

Inicialmente, vamos nos focalizar numa propriedade fundamental das funções de Green: a invariância translacional. Consideremos uma translação

rígida de todos os pontos do espaço-tempo pela mesma quantidade a^μ :

$$x'^\mu = x^\mu + a^\mu.$$

Existe um operador unitário que executa a operação de translação no espaço de Hilbert:

$$U_a = \exp(-ia^\mu P_\mu),$$

onde P_μ é o gerador de translações (que define o momentum associado ao campo ϕ). O campo ϕ transforma-se como

$$\phi'(x') = U_a \phi(x) U_a^\dagger.$$

O vácuo é postulado como um estado invariante sob translações

$$U_a^\dagger |0\rangle = |0\rangle.$$

Deste modo, vemos que as funções de Green têm que ser invariantes translacionais:

$$\begin{aligned} G'_m(x'_1, \dots, x'_m) &= \langle 0 | T(\phi'(x'_1) \dots \phi'(x'_m)) | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | T(U_a \phi(x_1) U_a^\dagger \dots U_a \phi(x_m) U_a^\dagger) | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | T(\phi(x_1) \dots \phi(x_m)) | 0 \rangle \\ &= G_m(x_1, \dots, x_m). \end{aligned}$$

Esta propriedade se reflete na transformada de Fourier de G_m da seguinte forma

$$\begin{aligned} \tilde{G}_m(p_1, \dots, p_m) &= \int dx'_1 \dots dx'_m e^{-ip_1 \cdot x'_1} \dots e^{-ip_m \cdot x'_m} G'_m(x'_1, \dots, x'_m) \\ &= \exp\left(-ia \cdot \sum_i p_i\right) \int dx_1 \dots dx_m e^{-ip_1 \cdot x_1} \dots e^{-ip_m \cdot x_m} G_m(x_1, \dots, x_m) \\ &= \exp\left(-ia \cdot \sum_i p_i\right) \tilde{G}_m(p_1, \dots, p_m). \end{aligned}$$

De modo que \tilde{G}_m seja diferente de zero, temos, então, que ter

$$\tilde{G}_m(p_1, \dots, p_m) = (2\pi)^4 \delta^{(4)}\left(\sum_i p_i\right) \bar{G}_m(p_1, \dots, p_m),$$

Fazendo as integrações em x , y , x_1 e x_2 :

$$\begin{aligned}
\tilde{I}(p_1, p_2) &= \beta \int \tilde{d}q_1 \tilde{d}q_2 \tilde{d}q_3 \tilde{d}q_4 \tilde{d}q_5 (2\pi)^4 \delta(p_1 + q_1) (2\pi)^4 \delta(p_2 - q_5) \\
&\quad \times (2\pi)^4 \delta(q_1 - q_2 - q_3 - q_4) (2\pi)^4 \delta(q_2 + q_3 + q_4 - q_5) \\
&\quad \times \tilde{\Delta}_F(q_1) \tilde{\Delta}_F(q_2) \tilde{\Delta}_F(q_3) \tilde{\Delta}_F(q_4) \tilde{\Delta}_F(q_5) \\
&= \beta \int \tilde{d}q_2 \tilde{d}q_3 \tilde{d}q_4 (2\pi)^4 \delta(p_1 + q_2 + q_3 + q_4) (2\pi)^4 \delta(q_2 + q_3 + q_4 - p_2) \\
&\quad \times \tilde{\Delta}_F(-p_1) \tilde{\Delta}_F(q_2) \tilde{\Delta}_F(q_3) \tilde{\Delta}_F(q_4) \tilde{\Delta}_F(p_2) \\
&= (2\pi)^4 \delta(p_1 + p_2) \beta \int \tilde{d}q_2 \tilde{d}q_3 \tilde{\Delta}_F(-p_1) \tilde{\Delta}_F(p_2) \\
&\quad \times \tilde{\Delta}_F(q_2) \tilde{\Delta}_F(q_3) \tilde{\Delta}_F(p_2 - q_2 - q_3).
\end{aligned}$$

Obtemos, desta forma, $\tilde{I}(p_1, p_2) = (2\pi)^4 \delta(p_1 + p_2) \bar{I}(p_1)$,

$$\bar{I}(p) = \beta \int \tilde{d}q_1 \tilde{d}q_2 \tilde{\Delta}_F(p) \tilde{\Delta}_F(q_1) \tilde{\Delta}_F(q_2) \tilde{\Delta}_F(p - q_1 - q_2) \tilde{\Delta}_F(-p)$$

(note que $\tilde{\Delta}_F(-p) = \tilde{\Delta}_F(p)$). Como deveríamos esperar, temos um gráfico com 5 propagadores, mas reorganizado para levar em conta a conservação do momentum total:

$$\bar{I}(p) = \beta \begin{array}{c} \begin{array}{c} \xrightarrow{p} \quad \begin{array}{c} \xrightarrow{q_1} \\ \circlearrowleft \\ \xrightarrow{q_2} \\ \circlearrowright \\ \xrightarrow{p - q_1 - q_2} \end{array} \quad \xleftarrow{p} \\ \end{array} \end{array} .$$

A convenção, aqui, é de que momenta que “entrem” no vértice sejam contados com sinal de +, enquanto os que “saem” recebam o sinal de -. A soma de todos os momenta que chegam e saem de um determinado vértice, então, é zero.

Pode-se mostrar que o número de laços (circuitos fechados, ou *loops* em inglês) é igual ao número de variáveis independentes sobre as quais se deve integrar, no espaço de momenta. No nosso exemplo, temos dois laços e duas variáveis independentes (q_1 e q_2). Esta observação completa as regras de Feynman no espaço de momenta. Há especificidades para os casos de férmions e bósons vetoriais que não foram mencionadas aqui.