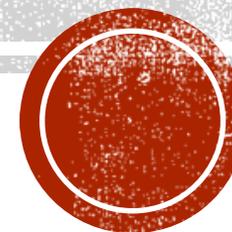


FÍSICA DE ESTRELAS DE NÊUTRONS

Prof. Rodrigo Negreiros – UFF

XI Escola do CBPF



PROGRAMA

- ~~I. Introdução.~~
 - ~~II. Visão geral de estrelas compactas.~~
 - ~~III. Física nuclear relativística.~~
 - ~~IV. Estrelas de Nêutrons no contexto da física nuclear.~~
 - Relatividade Geral – revisão
 - Estrutura de estrelas de nêutrons dentro do contexto da relatividade geral.
 - Estrelas de nêutrons com rotação não nula.
 - Estrelas de nêutrons com campos Magnéticos.
 - Evolução de estrelas de nêutrons – aspectos gerais.
 - Evolução rotacional de estrelas de nêutrons.
 - Evolução térmica de estrelas de nêutrons.
 - Evolução termo-rotacional de estrelas de nêutrons.
- Aula I
- Aula II
- Aula III
- Aula IV
- Aula V
- Aula VI
- Aula VII
- Aula VIII



**PARA UM MELHOR APROVEITAMENTO DO
CONTEÚDO MINISTRADO, RECOMENDAMOS À
AUDIÊNCIA QUE MANTENHA OS APARELHOS
ELETRÔNICOS (CELULARES, LAPTOPS)
DESLIGADOS DURANTE AS AULAS.**

**COMISSÃO ORGANIZADORA
XI ESCOLA DO CBPF**

BREVE FUNDAMENTAÇÃO MATEMÁTICA

▪ Vetores $\vec{V} = \sum_{\alpha} V^{\alpha} \vec{e}_{\alpha} \equiv V^{\alpha} \vec{e}_{\alpha}$  Notação de Einstein

▪ Forma-Um (Vetor Dual) $\tilde{W} = W_{\alpha} \tilde{\omega}^{\alpha}$

▪ Tensores: Funções de $q + p$ variáveis (q vetores, p formas-um)

$$\begin{aligned} T(\vec{V}_1, \dots, \vec{V}_q; \tilde{W}_1, \dots, \tilde{W}_p) &= T(V_1^{\lambda_1} \vec{e}_{\lambda_1}, \dots, V_q^{\lambda_q} \vec{e}_{\lambda_q}; W_{1\kappa_1} \tilde{\omega}^{\kappa_1} \dots, W_{p\kappa_p} \tilde{\omega}^{\kappa_p}) \\ &= V_1^{\lambda_1} \dots V_q^{\lambda_q} W_{1\kappa_1} \dots W_{p\kappa_p} T(\vec{e}_{\lambda_1}, \dots, \vec{e}_{\lambda_q}; \tilde{\omega}^{\kappa_1}, \dots, \tilde{\omega}^{\kappa_p}) \\ &\equiv V_1^{\lambda_1} \dots V_q^{\lambda_q} W_{1\kappa_1} \dots W_{p\kappa_p} T_{\lambda_1 \dots \lambda_q}{}^{\kappa_1 \dots \kappa_p}, \end{aligned}$$

$$T_{\lambda_1 \dots \lambda_q}{}^{\kappa_1 \dots \kappa_p} \equiv T(\vec{e}_{\lambda_1}, \dots, \vec{e}_{\lambda_q}; \tilde{\omega}^{\kappa_1}, \dots, \tilde{\omega}^{\kappa_p}).$$



BREVE FUNDAMENTAÇÃO MATEMÁTICA

- Exemplo: Tensor Métrico (0,2) $g(\vec{A}, \vec{B}) = A^\alpha B^\beta g(\vec{e}_\alpha, \vec{e}_\beta) \equiv A^\alpha B^\beta g_{\alpha\beta}$
- Para geometrias tridimensionais $g(d\vec{x}, d\vec{x}) = g(dx^i \vec{e}_i, dx^j \vec{e}_j) = dx^i dx^j g(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = g_{ij} dx^i dx^j$
- A distância infinitesimal entre dois pontos é pelo elemento de linha

$$ds^2 \equiv g(d\vec{x}, d\vec{x}) = g_{ij} dx^i dx^j = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

- De maneira que em um espaço euclidiano temos que

$$(g_{ij}) = (\delta_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



PRINCIPIO DA RELATIVIDADE

- O principio da relatividade implica que as leis da física sejam as mesmas em qualquer referencial inercial → **COVARIÂNCIA**
- O principio da relatividade geral implica que as leis da física sejam invariantes por transformações de Lorentz → **COVARIÂNCIA DE LORENTZ**
- Transformações de Lorentz $x'^{\alpha} = \Lambda^{\alpha}_{\beta} x^{\beta}$ onde:

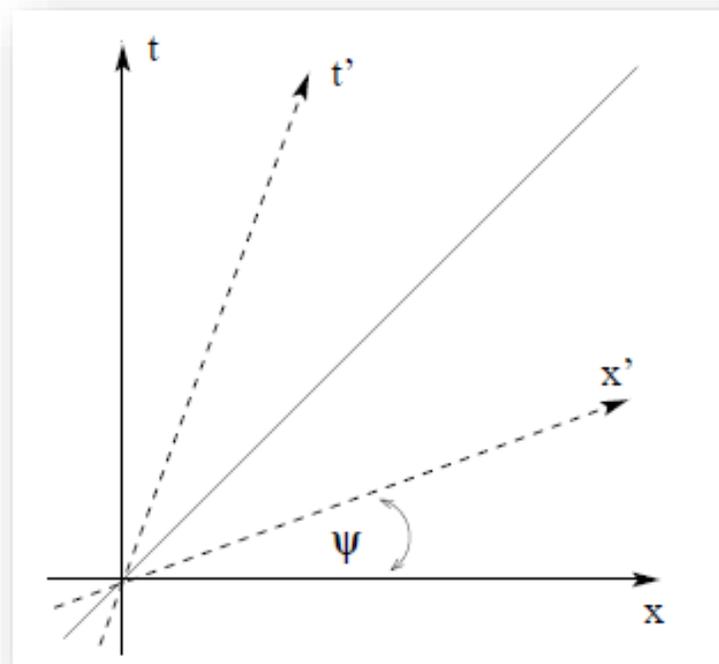
$$(\Lambda^{\alpha}_{\beta}) = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta/c & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} \gamma &= (1 - \beta^2)^{-1/2} \\ \beta &\equiv v/c. \end{aligned}$$



PRINCIPIO DA RELATIVIDADE

- Podemos representar as transformações de Lorentz como “rotações”

$$\begin{aligned}t' &= t \cosh \psi - x \sinh \psi \\x' &= -t \sinh \psi + x \cosh \psi \\y' &= y \\z' &= z,\end{aligned}$$

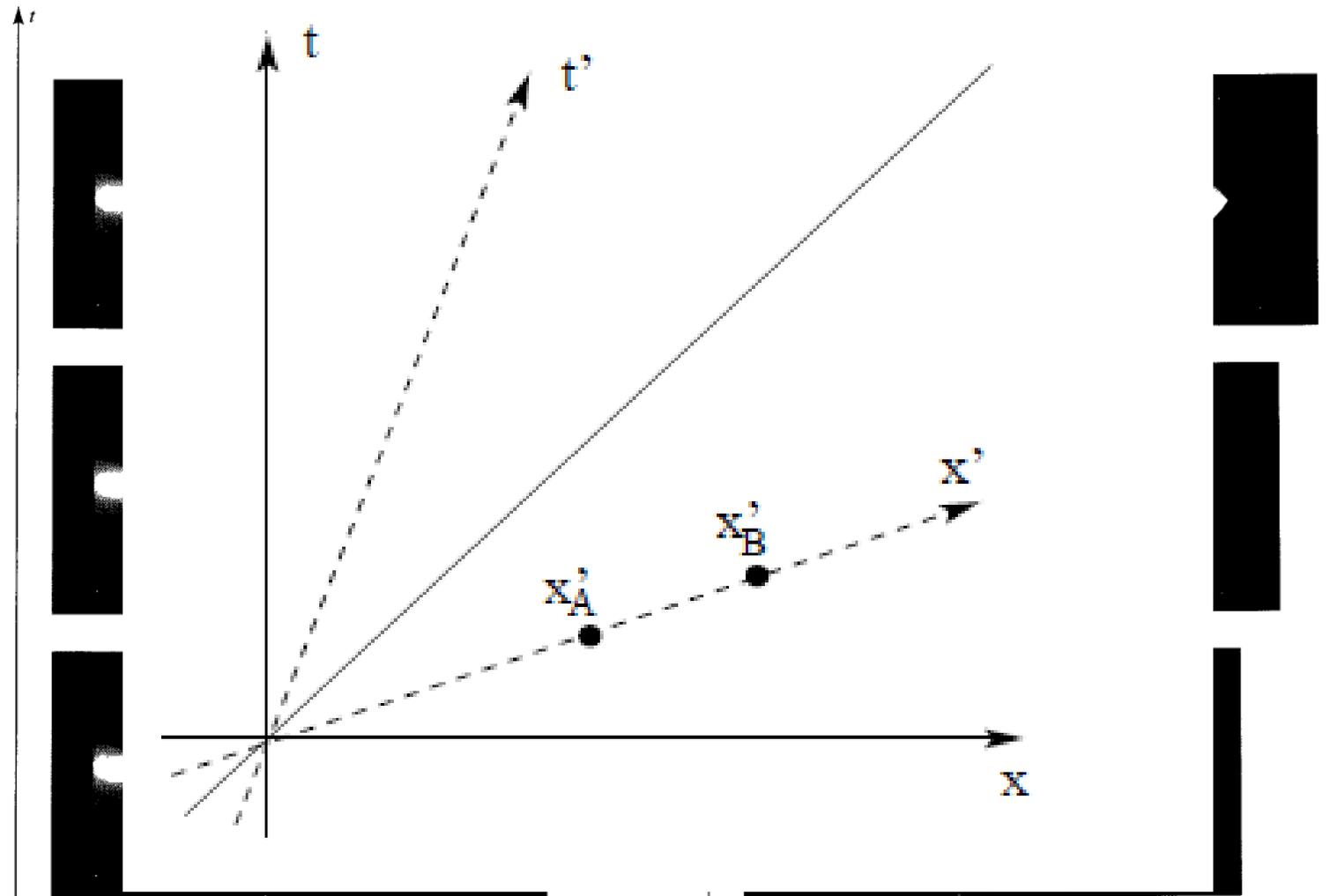


$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \cosh \psi$$



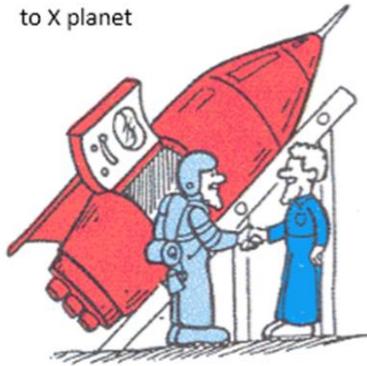
PRINCIPIO DA RELATIVIDADE

- Simultaneidade

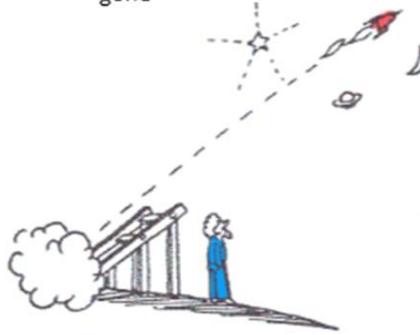


PARADOXO DOS GÊMEOS

Miko leaves the Earth to X planet



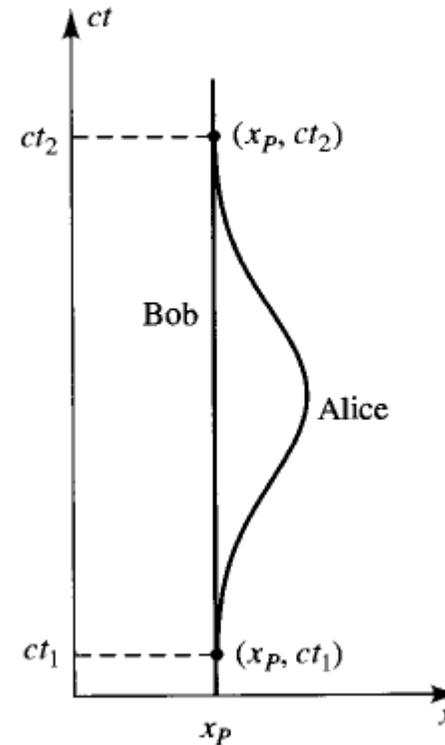
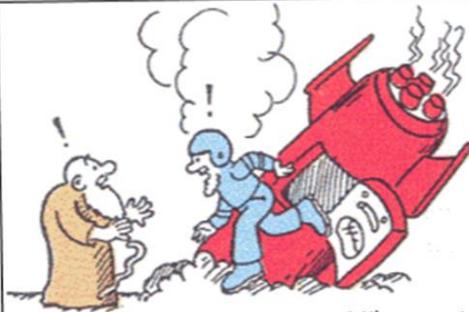
Miko is watching his gone



Miko is waiting his back

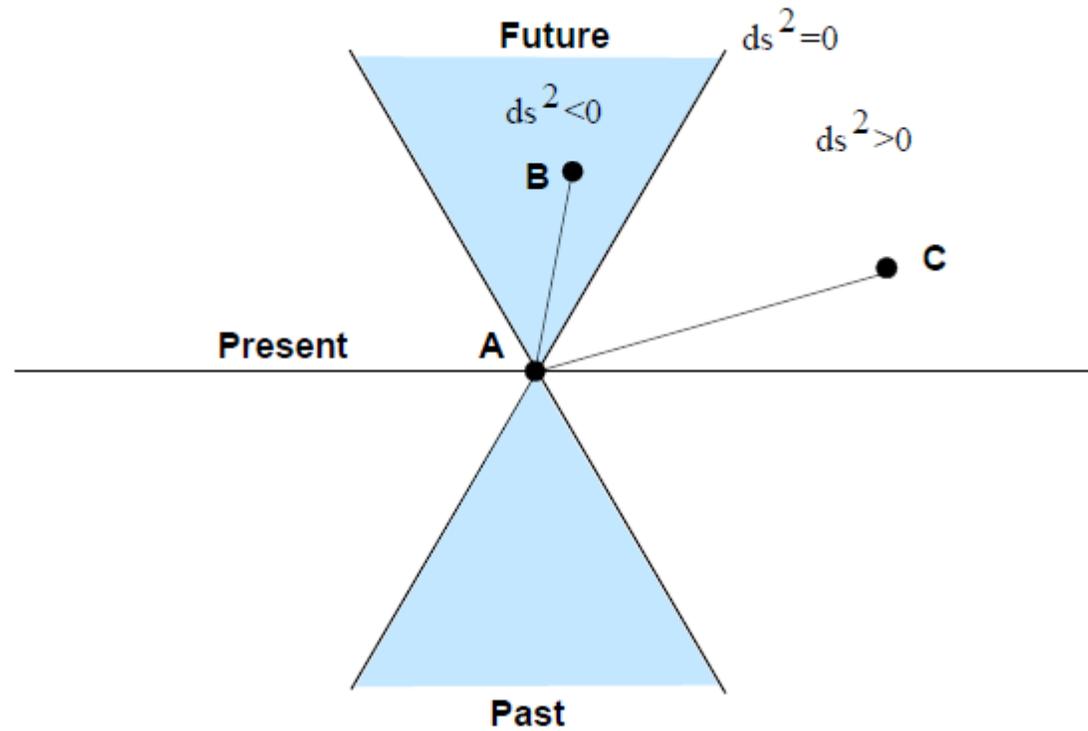


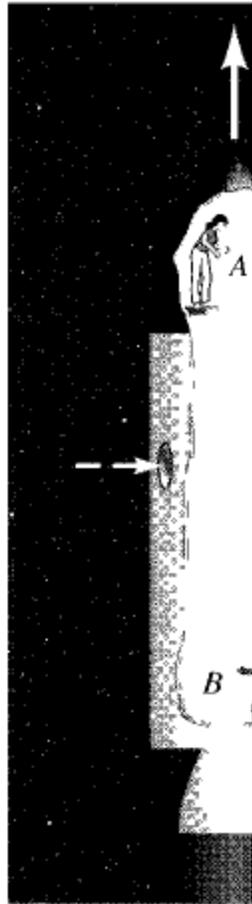
Miko surprises with Miko's age



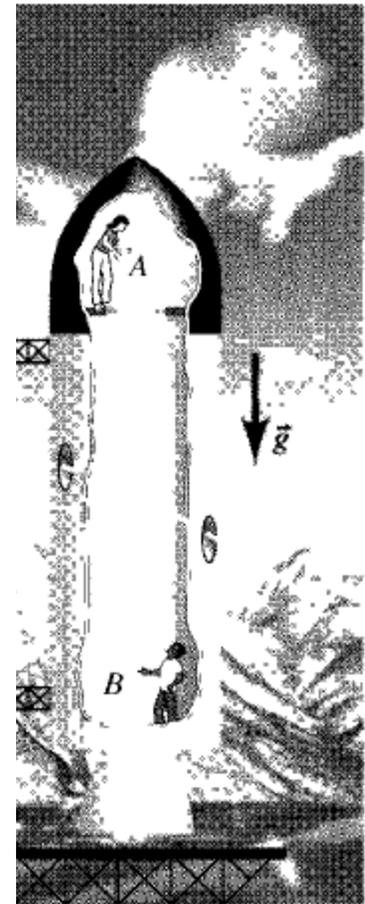
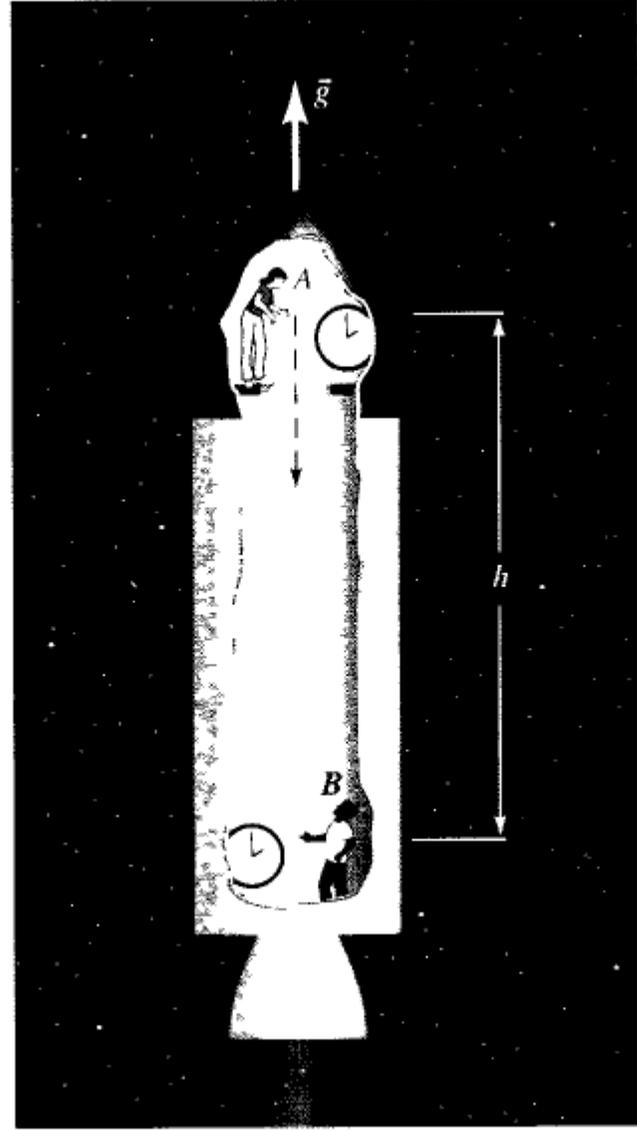
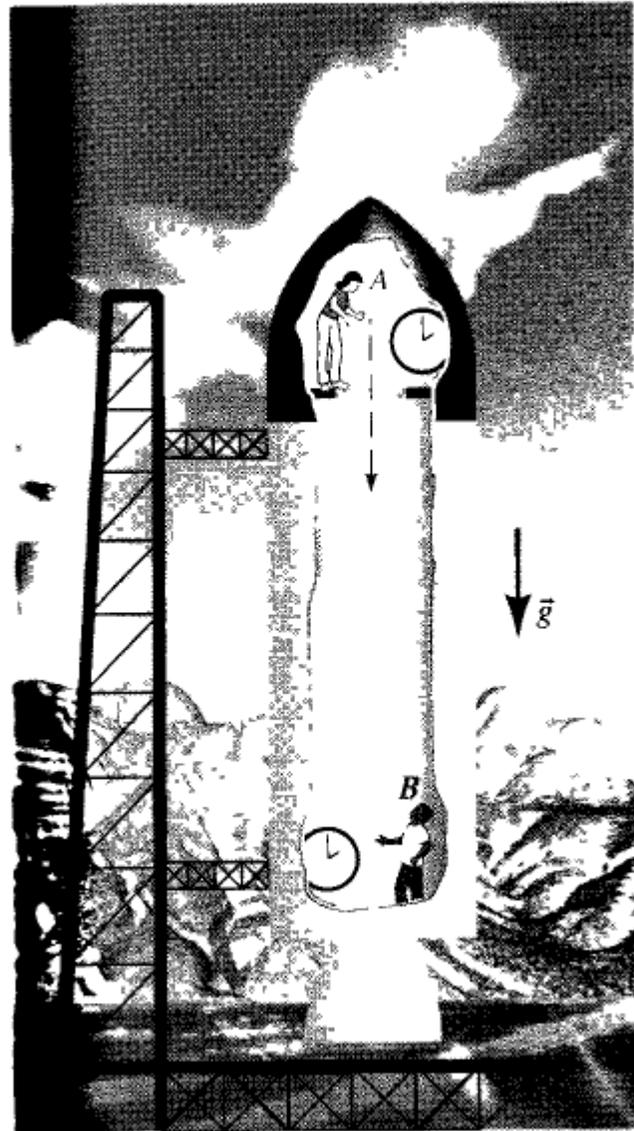
DIAGRAMAS ESPAÇO-TEMPO

$ds^2 < 0$: Tipo-Tempo
 $ds^2 = 0$: Tipo-Luz
 $ds^2 > 0$: Tipo-Espaço





inertial frame
when light r

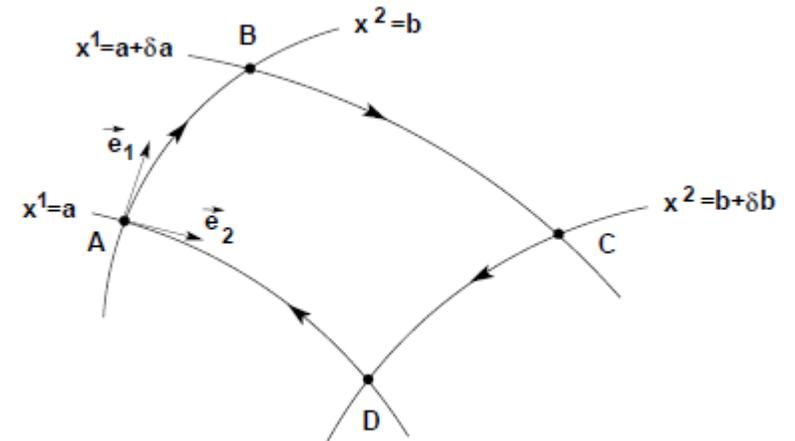


gravitational field



O TENSOR DE CURVATURA DE RIEMMAN

- Definimos um circuito fechado em uma variedade Riemanniana
- Transportamos um vetor paralelamente ao longo do circuito.
- A mudança no vetor ao longo do transporte é usada para se determinar a curvatura da variedade.



$$R^{\alpha}{}_{\mu\lambda\sigma} \equiv \Gamma_{\mu\sigma,\lambda}^{\alpha} - \Gamma_{\mu\lambda,\sigma}^{\alpha} + \Gamma_{\nu\lambda}^{\alpha} \Gamma_{\mu\sigma}^{\nu} - \Gamma_{\nu\sigma}^{\alpha} \Gamma_{\mu\lambda}^{\nu}$$

↳ **Simbolo de Christoffel** $\Gamma_{\beta\gamma}^{\epsilon} = \frac{1}{2} g^{\epsilon\lambda} (g_{\lambda\beta,\gamma} + g_{\lambda\gamma,\beta} - g_{\beta\gamma,\lambda})$



A EQUAÇÃO DE EINSTEIN

- Buscamos uma equação relativística para a equação clássica para o campo gravitacional $\Delta^2 U = 4\pi\epsilon$.
- Na relatividade geral as fontes de curvatura é a massa-energia, representada pelo tensor energia-momento, o que sugere $\epsilon \rightarrow T^{\mu\nu}(\epsilon, P)$
- Precisamos então de um tensor de rank-2, para substituir o campo clássico $U \rightarrow$ *Tensor de Einstein:* $G^{\mu\nu}$
- A conservação de energia ($T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0$) implica que o tensor de Einstein deve satisfazer $G^{\mu\nu}_{;\nu} = 0$.
- Nos guiando pelo princípios de conservação de energia e utilizando as propriedades de curvatura, encontramos

$$\left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R \right)_{;\mu} \equiv G^{\mu\nu}_{;\mu} = 0$$

$$G^{\mu\nu} \equiv R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R$$

$$G^{\mu\nu} = 8\pi T^{\mu\nu}.$$



A EQUAÇÃO DE EINSTEIN NO VÁCUO

- No caso da ausência de massa-energia, segue que $T^{\mu\nu} = 0$
- Sendo assim, temos $R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R = 0$
- Podemos então multiplicar pela métrica e obter $g_{\mu\nu} R^{\mu\nu} - \delta^\mu_\mu R = 0$.

- Como $\sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu} R^{\mu\nu} = \underline{R}$ e $\sum_\mu \delta^\mu_\mu = 4$, temos que $R = 0$
- Logo, para o vácuo, temos

$$R^{\mu\nu} = 0$$



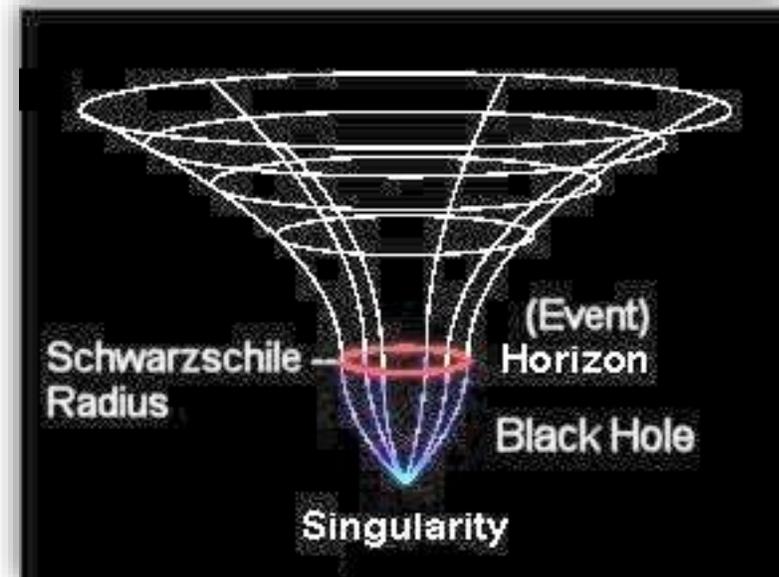
A SOLUÇÃO DE SCHWARZSCHILD

- Curvatura no exterior de uma distribuição de massa esfericamente simétrica

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) (c dt)^2 + \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$

- Explicitamente podemos escrever

$$g_{\alpha\beta} = \begin{matrix} & t & r & \theta & \phi \\ \begin{matrix} t \\ r \\ \theta \\ \phi \end{matrix} & \begin{pmatrix} -(1 - 2M/r) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ (1 - 2M/r)^{-1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r^2 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \end{matrix}$$



A SOLUÇÃO DE SCHWARZSCHILD - ÓRBITAS

- Vamos analisar a órbita de partículas em geometrias de Schwarzschild
- Conservação do momento angular implica que as órbitas se dão em um plano.
- Normalização da quadri-velocidade e ($\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = g_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta = -1$) nos dá

$$-\left(1 - \frac{2M}{r}\right) (u^t)^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} (u^r)^2 + r^2 (u^\phi)^2 = -1.$$

- Que pode ser reescrita como

$$\frac{e^2 - 1}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(1 + \frac{\ell^2}{r^2}\right) - 1 \right]$$

↓ Energia por massa

↓ Momento angular por massa

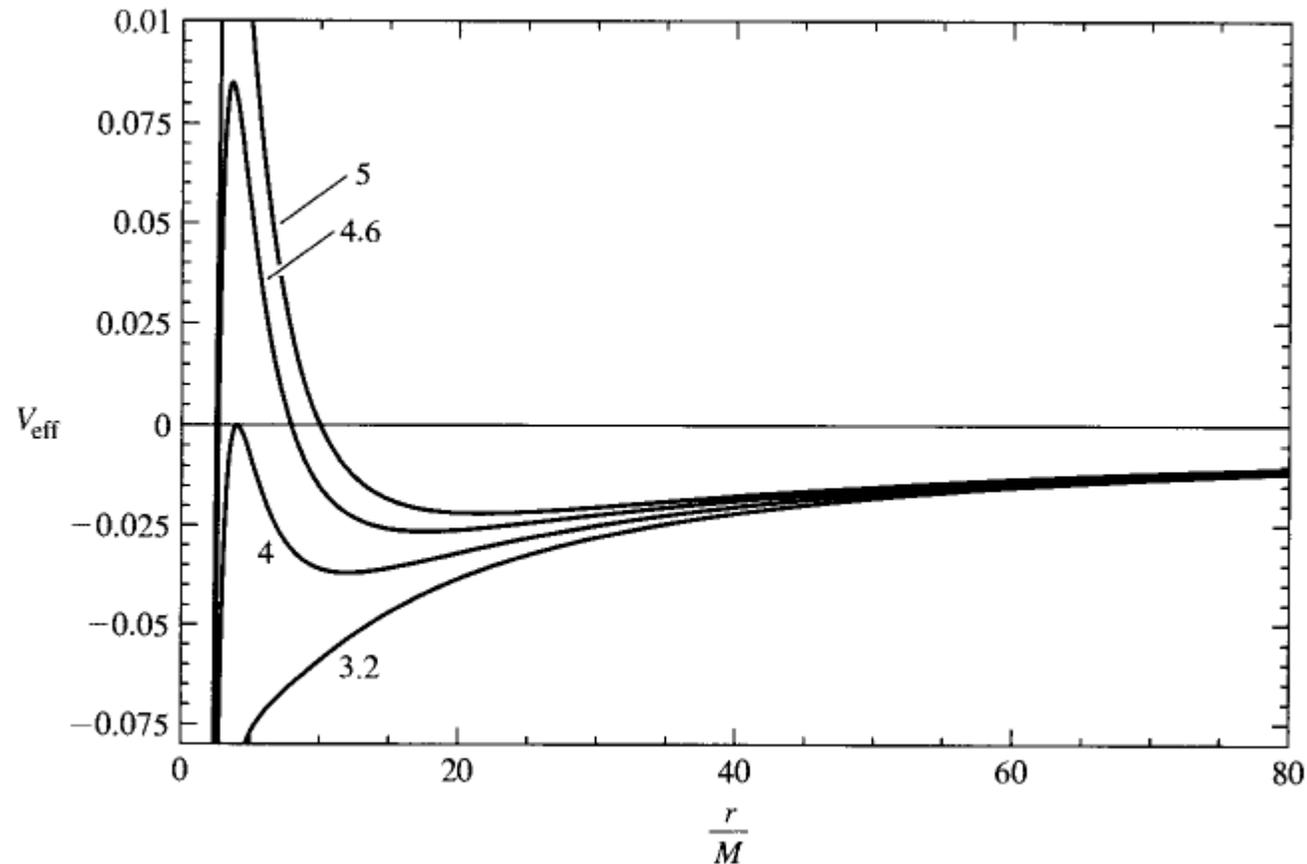
- Definimos então o potencial efetivo para o movimento radial em uma geometria de Schwarzschild

$$V_{\text{eff}}(r) \equiv \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(1 + \frac{\ell^2}{r^2}\right) - 1 \right] = -\frac{M}{r} + \frac{\ell^2}{2r^2} - \frac{M\ell^2}{r^3}$$

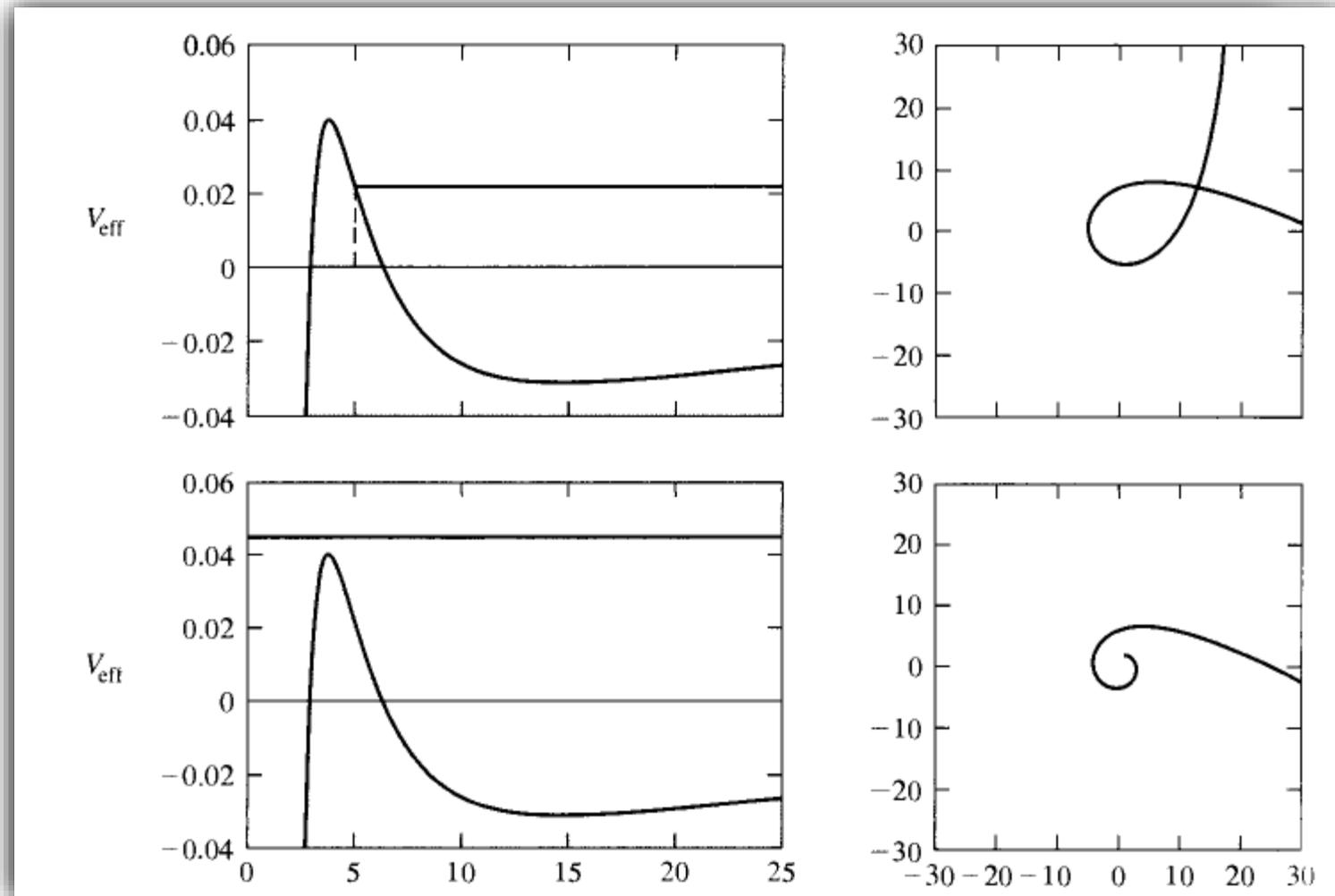


A SOLUÇÃO DE SCHWARZSCHILD - ÓRBITAS

- Podemos encontrar os máximos e mínimos do potencial efetivo fazendo $dV_{\text{eff}}/dr = 0$
- Encontramos



A SOLUÇÃO DE SCHWARZSCHILD - ÓRBITAS



A SOLUÇÃO DE SCHWARZSCHILD — FORMA DAS ÓRBITAS

- Precisamos encontrar r como função de ϕ ou vice-versa.

$$\frac{d\phi}{dr} = \pm \frac{\ell}{r^2} \frac{1}{[2(\mathcal{E} - V_{\text{eff}}(r))]^{1/2}} = \pm \frac{\ell}{r^2} \left[e^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(1 + \frac{\ell^2}{r^2}\right) \right]^{-1/2}$$

- Para determinar se uma órbita é fechada precisamos saber quanto ϕ variou em duas passagens sucessivas por um ponto de retorno. Se esse valor é diferente de 2π a órbita é dita precessionar.

- Temos então $\delta\phi_{\text{prec}} = \Delta\phi - 2\pi$

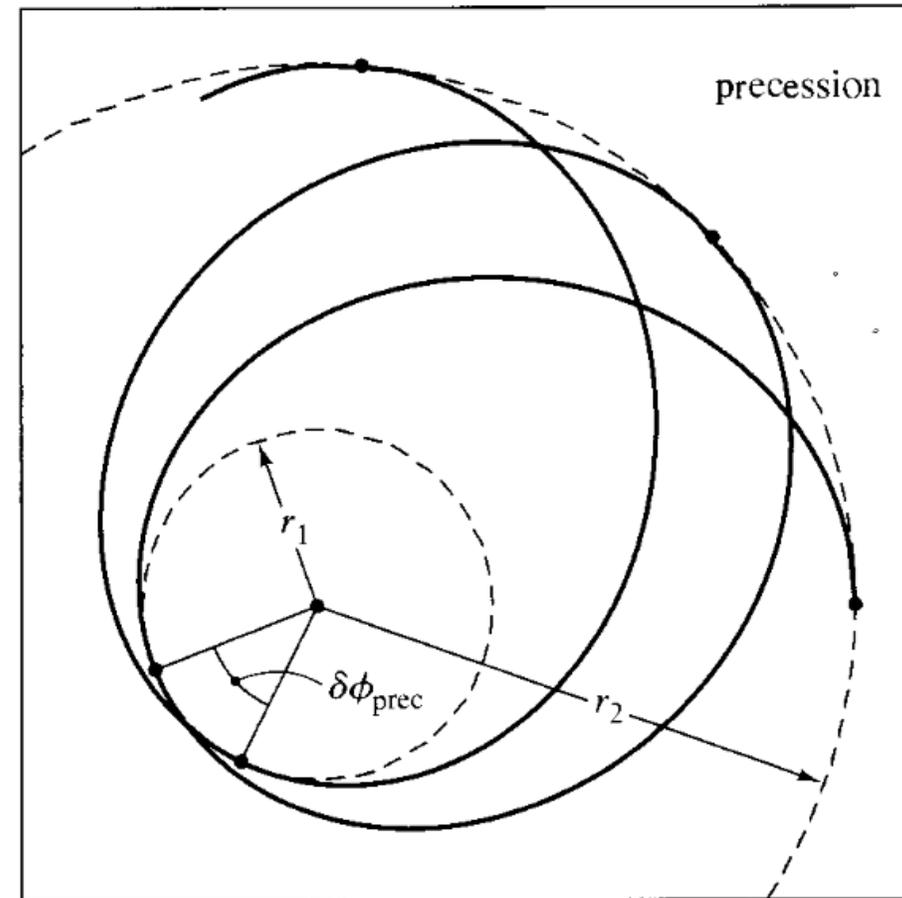
$$\Delta\phi = 2\ell \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} \left[e^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(1 + \frac{\ell^2}{r^2}\right) \right]^{-1/2}$$



A SOLUÇÃO DE SCHWARZSCHILD – FORMA DAS ÓRBITAS

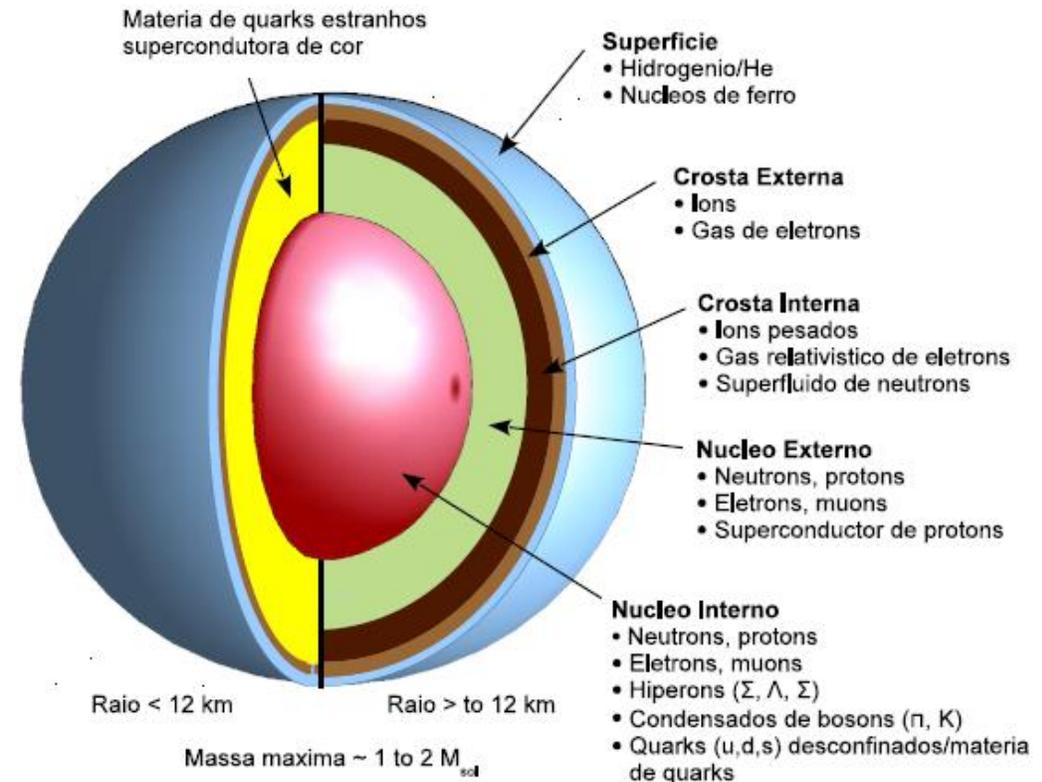
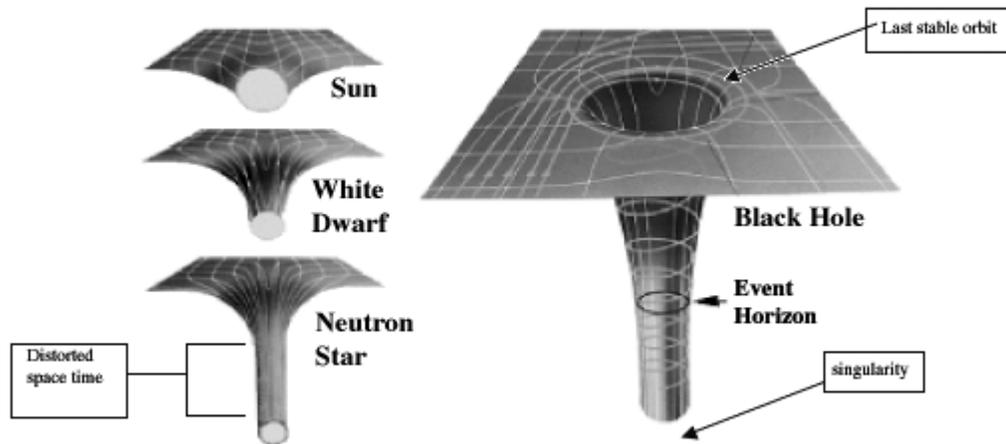
- Aplicando para o sistema Mercúrio-Sol, encontramos

$$\delta\phi_{\text{prec}} = \frac{6\pi G}{c^2} \frac{M}{a(1-\epsilon^2)}$$



ESTRELAS COMPACTAS

- Objetos relativísticos com estrutura.
- Precisamos resolver a equação de Einstein tanto para a parte interior, quanto para a parte exterior da estrela.



ESTRELAS COMPACTAS

- Começamos escrevendo a seguinte métrica

$$ds^2 = -e^{2\Phi(r)} dt^2 + e^{2\Lambda(r)} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2$$

- Que por sua vez nos permite calcular as componentes do tensor de curvatura de Riemann

$$R^t{}_{rtr} = -\Phi'' - \Phi'^2 + \Phi' \Lambda', \quad R^r{}_{\theta r\theta} = r \Lambda' e^{-2\Lambda}, \quad R^r{}_{\phi r\phi} = \Lambda' r \sin^2 \theta e^{-2\Lambda},$$

$$R^t{}_{\theta t\theta} = -r \Phi' e^{-2\Lambda}, \quad R^t{}_{\phi t\phi} = -r \Phi' \sin^2 \theta e^{-2\Lambda}, \quad R^\phi{}_{rr\phi} = -\frac{1}{r} \Lambda',$$

$$R^r{}_{ttr} = (-\Phi'' - \Phi'^2 + \Phi' \Lambda') e^{2\Phi-2\Lambda}, \quad R^\phi{}_{\theta\theta\phi} = -1 + e^{-2\Lambda}, \quad R^\theta{}_{rr\theta} = -\frac{1}{r} \Lambda',$$

$$R^\theta{}_{tt\theta} = -\Phi' r e^{2\Phi-2\Lambda}, \quad R^\theta{}_{\phi\theta\phi} = \sin^2 \theta (1 - e^{-2\Lambda}), \quad R^\phi{}_{tt\phi} = -\Phi' r e^{2\Phi-2\Lambda}.$$



ESTRELAS COMPACTAS

- Precisamos também das componentes do tensor de Ricci

$$R^t_t = \left(-\frac{1}{4} \Phi'^2 + \frac{1}{4} \Phi' \Lambda' - \frac{1}{2} \Phi'' - \frac{1}{r} \Phi' \right) e^{-\Lambda},$$

$$R^r_r = - \left(\frac{1}{4} \Phi'^2 - \frac{1}{4} \Phi' \Lambda' + \frac{1}{2} \Phi'' - \frac{1}{r} \Lambda' \right) e^{-\Lambda},$$

$$R^\theta_\theta = -\frac{1}{r^2} e^{-\Lambda} \left(1 - \frac{1}{2} r \Lambda' + \frac{1}{2} r \Phi' \right) + \frac{1}{r^2}, \quad R^\phi_\phi = R^\theta_\theta.$$

- E do escalar de Ricci

$$R = \frac{1}{r^2} (2 \Phi' \Lambda' r^2 - 2 \Phi'' r^2 - 2 \Phi'^2 r^2 - 4 r \Phi' + 4 r \Lambda' + 2 e^{2\Lambda} - 2) e^{-2\Lambda}$$



ESTRELAS COMPACTAS

- Podemos finalmente escrever

$$\mu = \nu = t: \quad e^{-2\Lambda} \left(2 \frac{\Lambda'}{r} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2} = 8\pi \epsilon,$$

$$\mu = \nu = r: \quad e^{-2\Lambda} \left(2 \frac{\Phi'}{r} + \frac{1}{r^2} \right) - \frac{1}{r^2} = 8\pi P,$$

$$\mu = \nu = \theta: \quad e^{-2\Lambda} \left(\Phi'' - \Phi' \Lambda' + \Phi'^2 + \frac{\Phi' - \Lambda'}{r} \right) = 8\pi P,$$

$$\mu = \nu = \phi: \quad G^\phi_\phi = G^\theta_\theta, \quad e \quad T^\phi_\phi = T^\theta_\theta.$$

- Onde usamos como fontes um fluido perfeito.



ESTRELAS COMPACTAS

- Já encontramos as equações que definem a curvatura.
- Precisamos resolver simultaneamente as condições de equilíbrio estelar.
- A condição de conservação do momento-energia implica

$$0 = T^{\mu}_{\nu;\mu} = (\epsilon + P)_{;\mu} u^{\mu} u_{\nu} + (\epsilon + P)(u_{\nu;\mu} u^{\mu} + u_{\nu} u^{\mu}_{;\mu}) + \delta^{\mu}_{\nu} P_{;\mu}$$

- Onde

$$u^{\mu} = (u^0, u^1, u^2, u^3) = \frac{dx^{\mu}}{d\tau} = \left(\frac{dx^0}{d\tau}, \frac{dx^1}{d\tau}, \frac{dx^2}{d\tau}, \frac{dx^3}{d\tau} \right)$$

- Podemos, após alguma álgebra, encontrar a equação de Euler relativística

$$(\epsilon + P) u_{\sigma;\mu} u^{\mu} + P_{,\sigma} + P_{,\mu} u^{\mu} u_{\sigma} = 0$$



ESTRELAS COMPACTAS

- Utilizando a equação de Euler relativística para uma estrelas estática e esfericamente simétrica, onde

$$-1 = u^\nu u_\nu = u^\nu g_{\nu\mu} u^\mu = (u^t)^2 g_{tt} = -(u^t)^2 e^{2\Phi}$$

- Encontramos

$$(\epsilon + P) u_{r;\mu} u^\mu + P_{,r} = 0$$

- Que pode ser reescrita como

$$\frac{dP}{dr} = (\epsilon + P) \Gamma_{r\mu}^\lambda u_\lambda u^\mu = -(\epsilon + P) \frac{d\Phi}{dr}$$



ESTRELAS COMPACTAS

- Neste momento, introduzimos

$$m(r) \equiv 4\pi \int_0^r dr' r'^2 \epsilon(r') \quad \Rightarrow \quad \frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \epsilon(r)$$

- Com esta definição podemos integrar uma das equações de Einstein, obtendo

$$e^{-2\Lambda} 2\Lambda' r - e^{-2\Lambda} + 1 = -\frac{d}{dr} (e^{-2\Lambda} r - r) \quad \longrightarrow \quad e^{-2\Lambda} = 1 - \frac{2m}{r}.$$

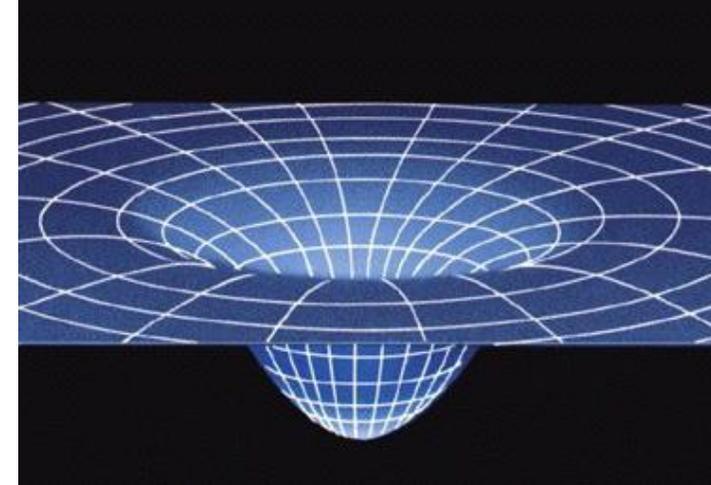
- Manipulando as equações de Einstein, encontramos

$$\Phi' = \frac{4\pi r^3 P + m}{r^2 (1 - 2m/r)}$$



RESUMINDO

- Devido à alta densidade a teoria da Gravitação de Newton não é apropriada para descrever a estrutura de uma estrela compacta.
- Precisamos fazer uso da teoria da gravitação de Einstein.



$$ds^2 = e^{\nu(r)} c^2 dt^2 - e^{\lambda(r)} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \longrightarrow \text{Métrica}$$

$$T_{\nu}^{\mu} = (p + \epsilon) u^{\mu} u_{\nu} + p \delta_{\nu}^{\mu} \longrightarrow \text{Tensor Energia-Momento}$$

$$G_{\nu\mu} = 8\pi T_{\nu\mu} \longrightarrow \text{Equação de Einstein}$$

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{[p(r) + \epsilon(r)][m(r) + 4\pi r^3 p(r)]}{r(r - 2m(r))} \longrightarrow \text{Equação de Tolmann-Oppenheimer-Volkoff (TOV) – Equilíbrio hidrostático.}$$

$$m(r) = 4\pi \int_0^r dr r^2 \epsilon(r) \longrightarrow \text{Continuidade de massa}$$



COMPUTAÇÃO DA ESTRUTURA



RECAPITULANDO . . .

“Alimentar” com modelos microscópicos a serem estudados.



Comparar com dados de observações.

