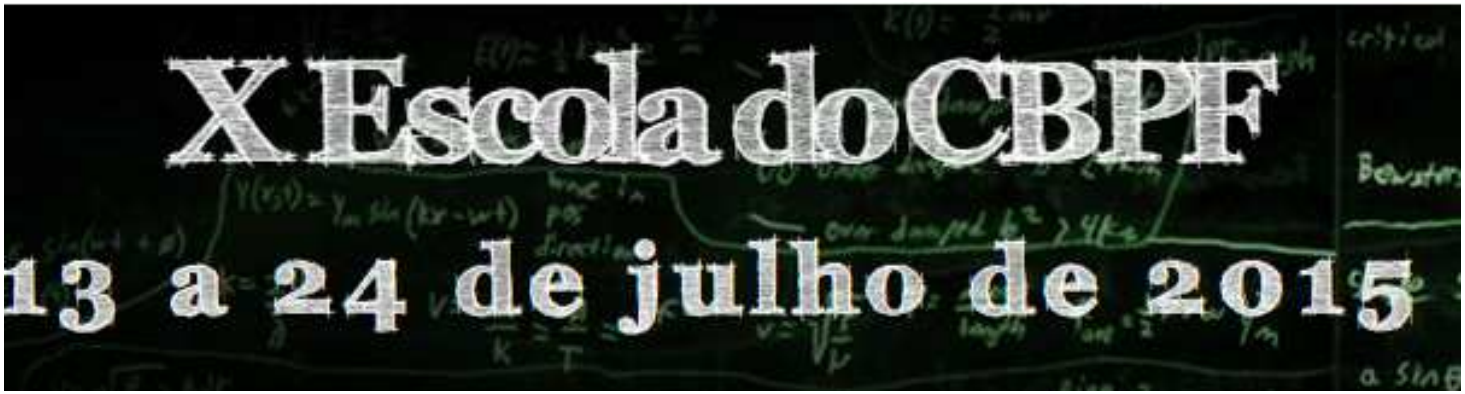

X Escola do CBPF
13 a 24 de julho de 2015

Formação e Estrutura de Estrelas Compactas

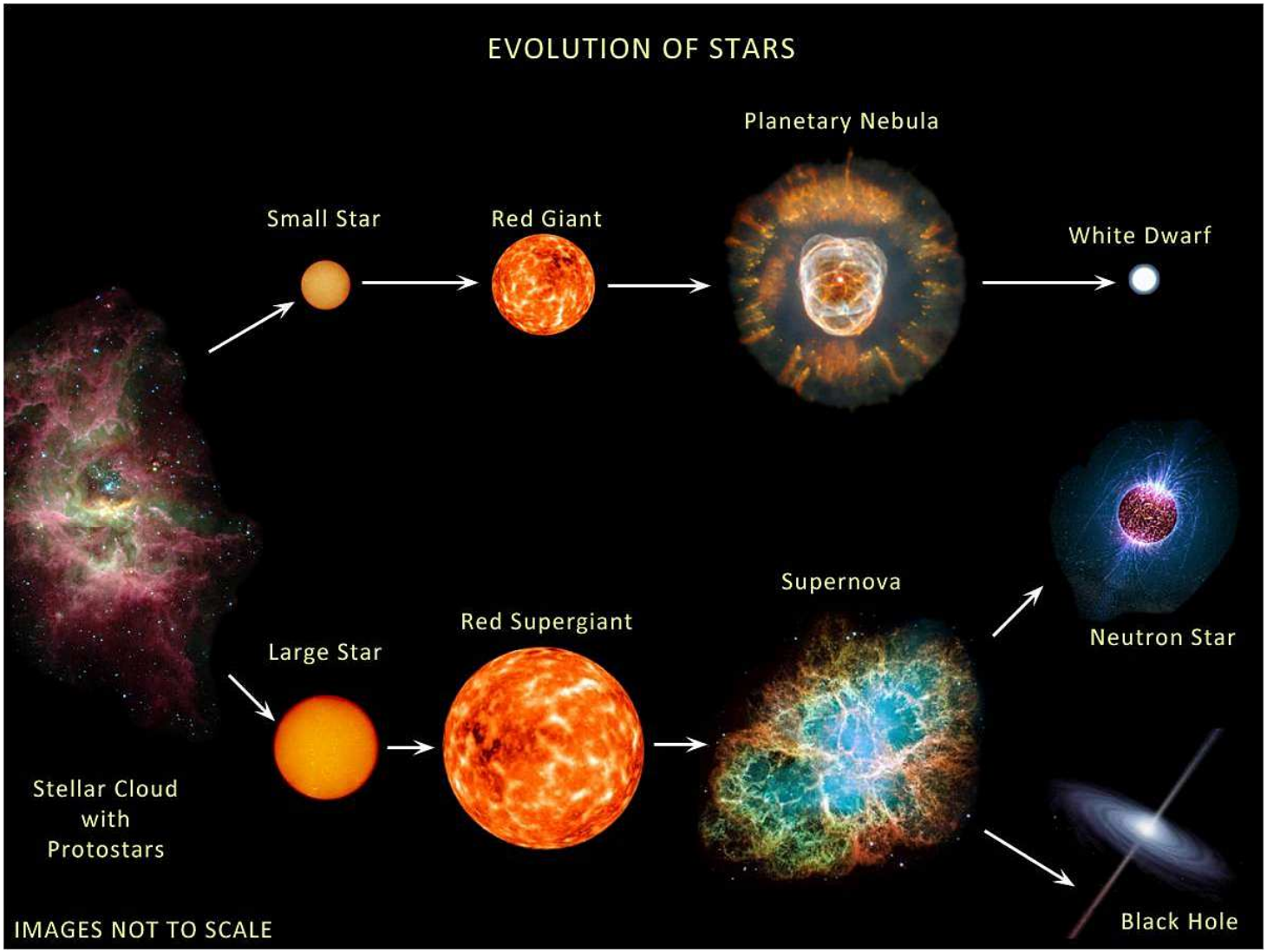
X Escola do CBPF

Hilário Rodrigues

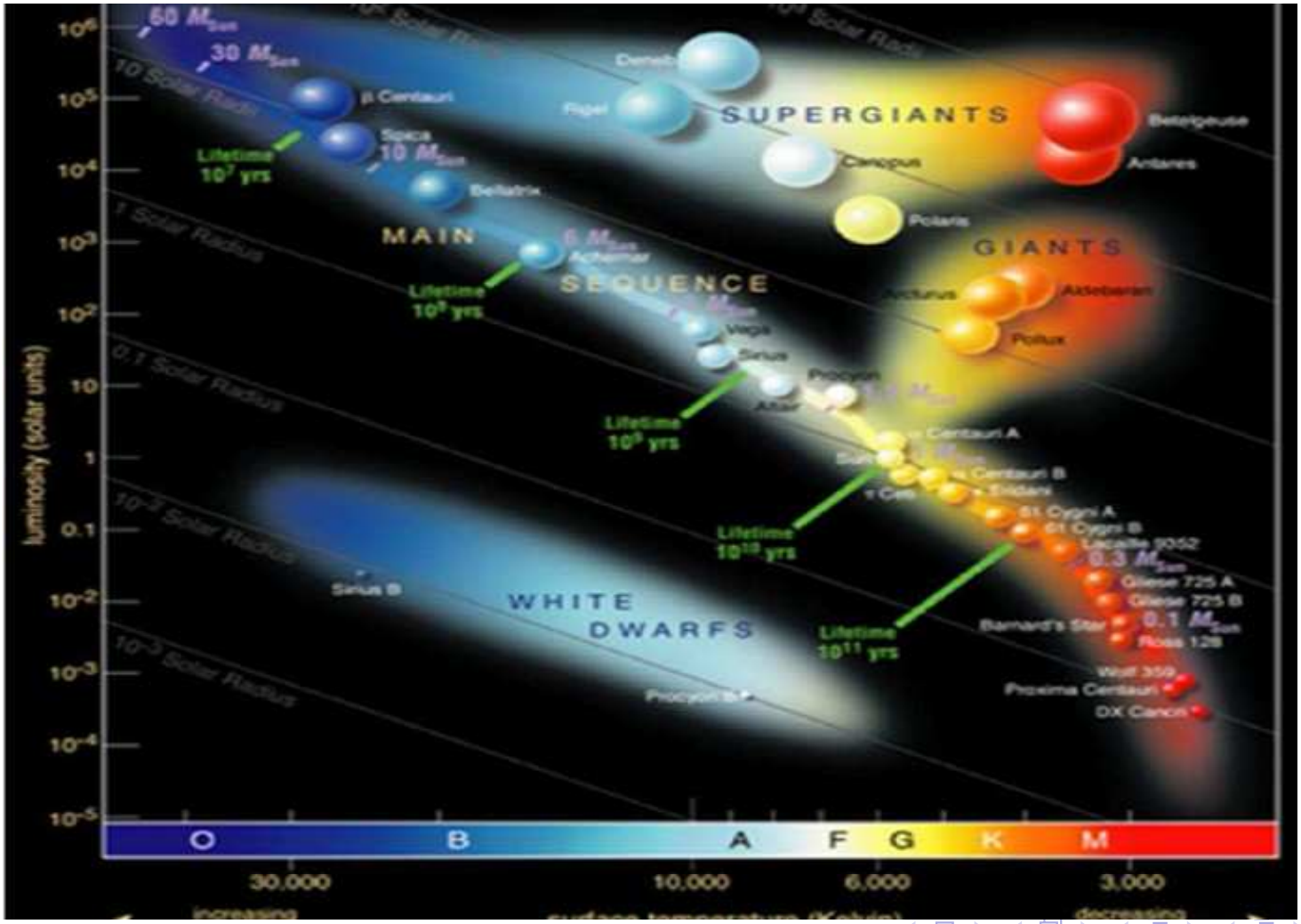
August 3, 2015

Roteiro

1. Anãs Brancas
2. Estrelas de Nêutron
3. Modelos Efetivos/Equação de Estado da Matéria Nuclear
4. Estrelas Híbridas
5. Estrelas de Quark


EVOLUTION OF STARS
Planetary Nebula
Small Star
Red Giant
White Dwarf
Supernova
Red Supergiant
Large Star
Neutron Star
Stellar Cloud
with
Protostars
Black Hole
IMAGES NOT TO SCALE

Evolução das Anãs Brancas



Características

- Não há mais produção de energia
- Sua luminosidade se deve à energia térmica
- Lei de Stefan-Boltzmann: $L = 4\pi R^2 \sigma T_{ef}^4$
- Matéria degenerada. O raio dependente apenas da sua massa. Então $L = \text{const.}\ T_{ef}^4$.
- Para uma temperatura central inicial de $5 \times 10^6\, K$ e número da massa $A = 20$, a anã branca leva $\sim 10^9$ anos para se resfriar
- Com o resfriamento, a matéria estelar forma uma estrutura cristalina
- Ao fim desse período a estrela se torna uma anã negra, densa, fria, e cristalizada

- Sírius B (1850): companheira da estrela Sírius A. É a anã branca mais próxima da Terra. Raio 6000 km e massa 0.98 $M_{\odot}$
- Procyon B (1896): companheira da estrela Procyon A. Raio estimado em 8400 km e massa 0.6 $M_{\odot}$





S. Chandrasekhar (Nobel 1983)



Mecânica Quântica

O equilíbrio das anãs brancas é possível por dois motivos

- Princípio de exclusão de Pauli: dois elétrons não podem ter o mesmo estado quântico
- Princípio da incerteza: $\Delta x \Delta p \sim \hbar$

O momento do elétron pode ser estimado: $p \sim \frac{\hbar}{\Delta x}$. Seja n_e a densidade de elétrons, então a distância média dos elétrons entre si é

$$\Delta x \sim n_e^{-1/3}$$

E o momento do elétron

$$p \sim \hbar n_e^{1/3}$$

A pressão dos elétrons pode ser estimada:

$$P = \frac{1}{3} n_e p v$$

Elétrons não-relativísticos: $v = p/m_e$. Obtemos então

$$P = \frac{1}{3} n_e p \frac{p}{m_e}$$

E, portanto,

$$P = \frac{1}{3} n_e (\hbar n_e^{1/3}) \left(\frac{n_e^{1/3}}{m_e} \right) \rightarrow P \sim n_e^{5/3}$$

Para densidades muito altas, os elétrons tornam-se relativísticos, e a velocidade tende à velodidade da luz: $v = c$. Neste caso

$$P = \frac{1}{3} n_e (\hbar n_e^{1/3}) c \rightarrow P \sim n_e^{4/3}$$

Podemos escrever, a partir desses resultados, $p = const \times \rho^{\gamma}$, onde γ é um parâmetro chamado expoente adiabático

- Gás não-relativístico: $\gamma = \frac{5}{3}$
- Gás relativístico: $\gamma = \frac{4}{3}$

Segunda lei da termodinâmica (processo adiabático):

- $dE = -pdV = -const \times M^{\gamma} V^{-\gamma} dV$

Integrando, obtemos

- $E = const \times M^{\gamma} \frac{V^{1-\gamma}}{\gamma - 1}$, ou $E = \frac{pV}{\gamma - 1}$

De forma geral, se $p(\rho) = K\rho^{\gamma}$, então

- $\frac{dp}{d\rho} = K\gamma\rho^{\gamma-1} \rightarrow \frac{\rho}{p}\frac{dp}{d\rho} = \gamma$

Podemos definir a partir daí o expoente adiabático efetivo

- $\gamma_{ef} = \frac{\rho}{p}\frac{dp}{d\rho} = \frac{d \ln p}{d \ln \rho}$

Matéria Degenerada

A energia de Fermi do gás de elétrons é definida por:

$$E_F = \sqrt{k_F^2 c^2 + m^2 c^4}$$

O gás é degenerado se a energia de Fermi é muito maior que a energia térmica característica do gás: $E_F \gg kT$
Como $E_F \geq mc^2 = 0.511$ MeV, isso implica que a temperatura crítica é $T_c = 0.511\, MeV/k \sim 6 \times 10^9\, K$
Temperaturas típicas no interior das anãs brancas: $10^6 - 10^7$ K.
Concluímos que anãs brancas contém um gás de elétrons frio e degenerado, permeando uma rede cristalina formada pelos núcleos atômicos.

Equilíbrio versus Instabilidade

Esfera de matéria degenerada de massa M e raio R:

- Energia gravitacional: $E_g \sim \frac{GM^2}{R}$
- Energia interna: $E_i \sim \frac{pV}{\gamma-1} = \frac{K\rho^\gamma V}{\gamma-1} = aM^\gamma R^{3(1-\gamma)}$
- Energia total: $E = aM^\gamma R^{3(1-\gamma)} - \frac{GM^2}{R}$

Minimizando em relação a R:

- $\frac{\partial E}{\partial R} = 0$
- $-bM^\gamma R^{2-3\gamma} + \frac{GM^2}{R^2} = 0$
- Para $\gamma = 5/3$, obtemos $-\frac{bM^{5/3}}{R^3} + \frac{GM^2}{R^2} = 0$
- Solução: $MR^3 = const.$

Para $\gamma = 4/3$ obtemos

- $\frac{-dM^{4/3}}{R^2} + \frac{GM^2}{R^2} = 0$

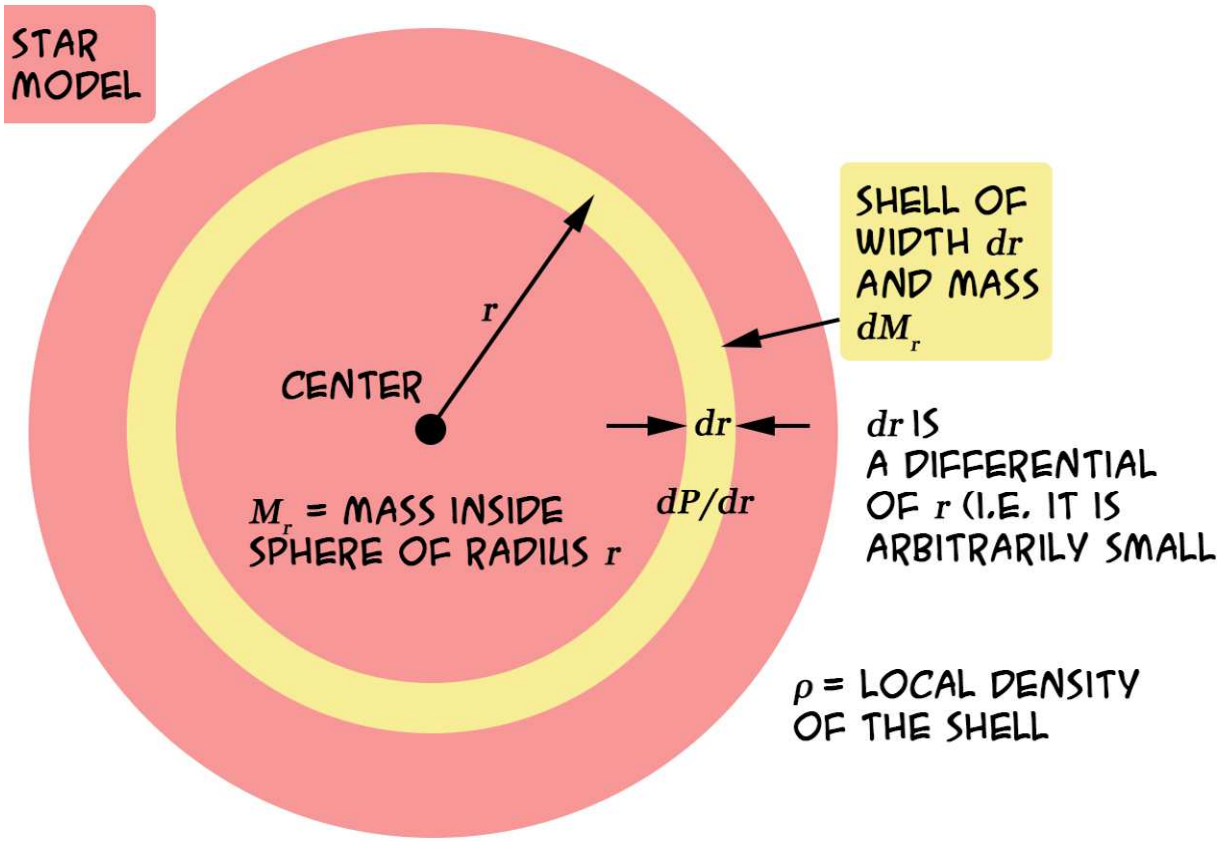
Sem dependêcia em R. Solução indeterminada.

- Caso não-relativísico: $E = aM^{5/3}R^{-2} - \frac{GM^2}{R}$. Os dois termos têm dependência em R diferentes.
- Caso relativísico: $E = c\frac{M^{4/3}}{R} - \frac{GM^2}{R}$. Os dois termos apresentam a mesma dependência m R.
- $E_i \propto M^{4/3}$ e $E_g \propto M^2$
- $\gamma \leq \frac{4}{3}$ é instável contra expansão ou contração.

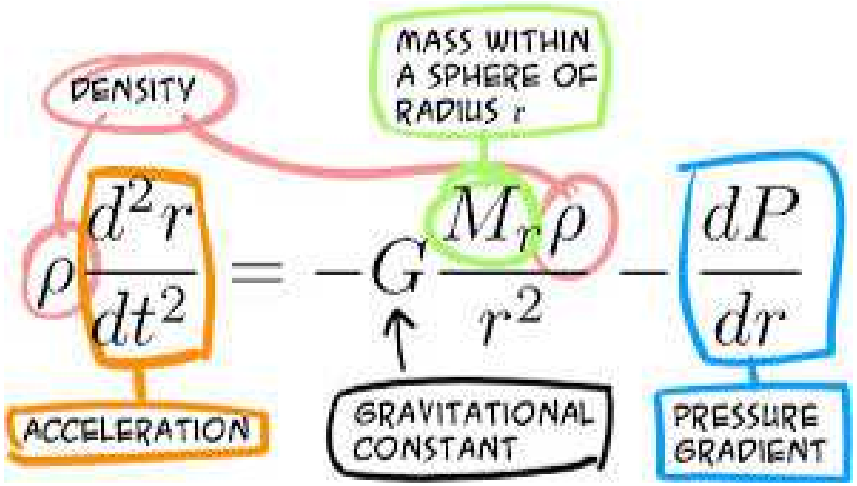
Massa crítica (estimativa): $E_g = E_i$.

$$M_c = \left(\frac{\hbar c}{G m_N^{4/3}}\right)^{3/2} \approx 1 M_\odot$$

Equilíbirio Hidrostático



Equilíbirio Hidrostático



Equilíbirio Hidrostático

Equação de equilíbrio hidrostático para uma estrela esférica (na aproximação da gravitação Newtoniana):

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{G\rho(r)m(r)}{r^2} \rightarrow \frac{r^2}{\rho}\frac{dp}{dr} = -Gm(r)$$

Equação da massa:

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi\rho r^2 \rightarrow m(r) = \int 4\pi\rho r^2 dr$$

Combinando as equações em uma única equação diferencial de segunda ordem:

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{r^2}{\rho}\frac{dp}{dr}\right) = -4\pi G\rho r^2$$

Equação de Lane-Emden

Para um gás politrópico a relação entre a pressão e a densidade é dada por:

$$p = K\rho^{\frac{n+1}{n}}$$

onde K é uma constante e n é definido por

$$n = \frac{1}{\gamma - 1}$$

onde γ é o expoente adiabático do politrópico.
Substituindo a equação de estado politrópica na equação de equilíbirio hidrostático obtemos

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{n+1}{n}K\rho^{-(n-1)/n}r^2\frac{d\rho}{dr}\right) = -4\pi G\rho r^2$$

Condições de contorno: $\rho(r=0) = \rho_c$ (densidade no centro da estrela); $p(r=0) = p_c$ (pressão central).

Parâmetros livres: índice politrópico n e a constante K. K está relacionado com a massa da estrela e composição química.
Definindo $\rho = \rho_c \theta^n$ e $r = \alpha\xi$, onde

$$\alpha = \left[\frac{(n+1)\,K\rho_c^{(1-n)/n}}{4\pi G}\right]^{1/2}$$

obtemos a equação de Lane-Emden

$$\frac{1}{\xi^2}\frac{d}{d\xi}\left(\xi^2\frac{d\theta}{d\xi}\right) = -\theta^n$$

que fornece θ em função de ξ com as condições de contorno $\theta(0) = 1$ e $\left.\frac{d\theta}{d\xi}\right|_{\xi=0} = 0$.
Existem soluções analíticas apenas para $n = 0,\ 1$ e 5.
Para $n < 5$ $(\gamma > \frac{6}{5})$ todas as soluções são monotonicamente descrecentes.
Para a solução numérica, inicia-se com $\xi = 0$ mais as condições de

Table 11.1: Lane–Emden constants

n	γ	ξ_1	$\xi_1^2 \lvert \theta'(\xi_1) \rvert$
0	∞	2.4494	4.8988
0.5	3	2.7528	3.7871
1.0	2	3.14159	3.14159
1.5	5/3	3.65375	2.71406
2.0	3/2	4.35287	2.41105
2.5	1.4	5.35528	2.18720
3.0	4/3	6.89685	2.01824
4.0	5/4	14.97155	1.79723
4.5	1.22	31.83646	1.73780
5.0	1.2	∞	1.73205

Limite de Chandrasekhar

O valor $\xi = \xi_1$ para o qual $\theta(\xi_1) = 0$ define o raio da estrela,

$$R = \alpha\xi_1 = \left[\frac{(n+1)\,K\rho_c^{(1-n)/n}}{4\pi G}\right]^{1/2} \xi_1$$

A massa da estrela pode ser obtida da equação

$$M = \int_0^R 4\pi\rho r^2 dr$$

Em termos das variáveis θ e ξ:

$$M = 4\pi\alpha^3\rho_c \int_0^{\xi_1} \xi^2\theta^n d\xi$$

Podemos escrever

$$M = -4\pi\alpha^3\rho_c \int_0^{\xi_1} \frac{d}{d\xi}\left(\xi^2\frac{d\theta}{d\xi}\right) d\xi$$

ou

$$M = -4\pi\alpha^3\rho_c\xi_1^2 \left.\frac{d\theta}{d\xi}\right|_{\xi=\xi_1}$$

Eliminando ρ_c e α obtemos a relação massa-raio

$$M = -4\pi R^{(3-n)/(1-n)} \left[\frac{(n+1)\,K}{4\pi G}\right]^{n/(n-1)} \xi_1{}^{(3-n)/(1-n)}\xi_1^2 \left.\frac{d\theta}{d\xi}\right|_{\xi=\xi_1}$$

Densidade central baixa: $n \approx 3/2$ $(\gamma = 5/3)$, e

$$\xi_1 = 3.654 \qquad \text{e} \qquad \left.\frac{d\theta}{d\xi}\right|_{\xi=\xi_1} = 0.2033$$

Neste caso $R \sim M^{-1/3}$.
Densidade central alta: $n \approx 3$ $(\gamma = 4/3)$ e

$$\xi_1 = 6.897 \qquad \text{e} \qquad \left.\frac{d\theta}{d\xi}\right|_{\xi=\xi_1} = 0.04243$$

Basicamente, as anãs brancas são compostas por núcleos atômicos e um gás de elétrons livres. A pressão do gás de elétrons se opõe à atração gravitacional. A pressão dos núcleos pode ser desprezada em relação a pressão dos elétrons.
Para densidades $\rho \ll 10^6\ gcm^{-3}$ o gás de elétrons é degenerado e não-relativístico, e a equação de estado é dada por

$$p = K_1 \rho^{5/3}$$

com $K_1 = 1.0036 \times 10^{13} \mu_e^{-5/3}$ (cgs), sendo μ_e o peso molecular médio:

$$\mu_e = \left(\sum_i \frac{Z_i X_i}{A_i} \right)^{-1}$$

Neste caso

$$R = \frac{1.9988 \times 10^4}{\mu_e^{5/6}} \left(\frac{\rho_c}{10^6\ gcm^{-3}} \right)^{-1/6} km$$

Para densidades elevadas ($\rho \gg 10^6\ gcm^{-3}$), a matéria estelar entra no regime de degenerescência relativística, em que a velocidade dos elétrons se aproxima da velocidade da luz. A equação de estado é dada por

$$p = K_2 \rho^{4/3}$$

onde $K_2 = 1.2435 \times 10^{15} \mu_e^{-4/3}$, em unidades do sistema cgs. Neste caso se obtém o raio

$$R = \frac{5.313 \times 10^4}{\mu_e^{2/3}} \left(\frac{\rho_c}{10^6\ gcm^{-3}} \right)^{-1/3} km$$

e a massa

$$M = 1.457 \left(\frac{2}{\mu_e} \right)^2 M_\odot$$

O limite de Chandrasekhar depende apenas da composição química da estrela, através do fator μ_e. Representa a massa máxima que pode ser sustentada pela pressão dos elétrons degenerados e ultra-relativísticos, contra a atração gravitacional. É a massa limite possível para uma anã branca. Um caroço composto de matéria degenerada com massa maior que o limite de Chandrasekhar torna-se instável, entrando em colapso gravitacional.

Interações Fundamentais

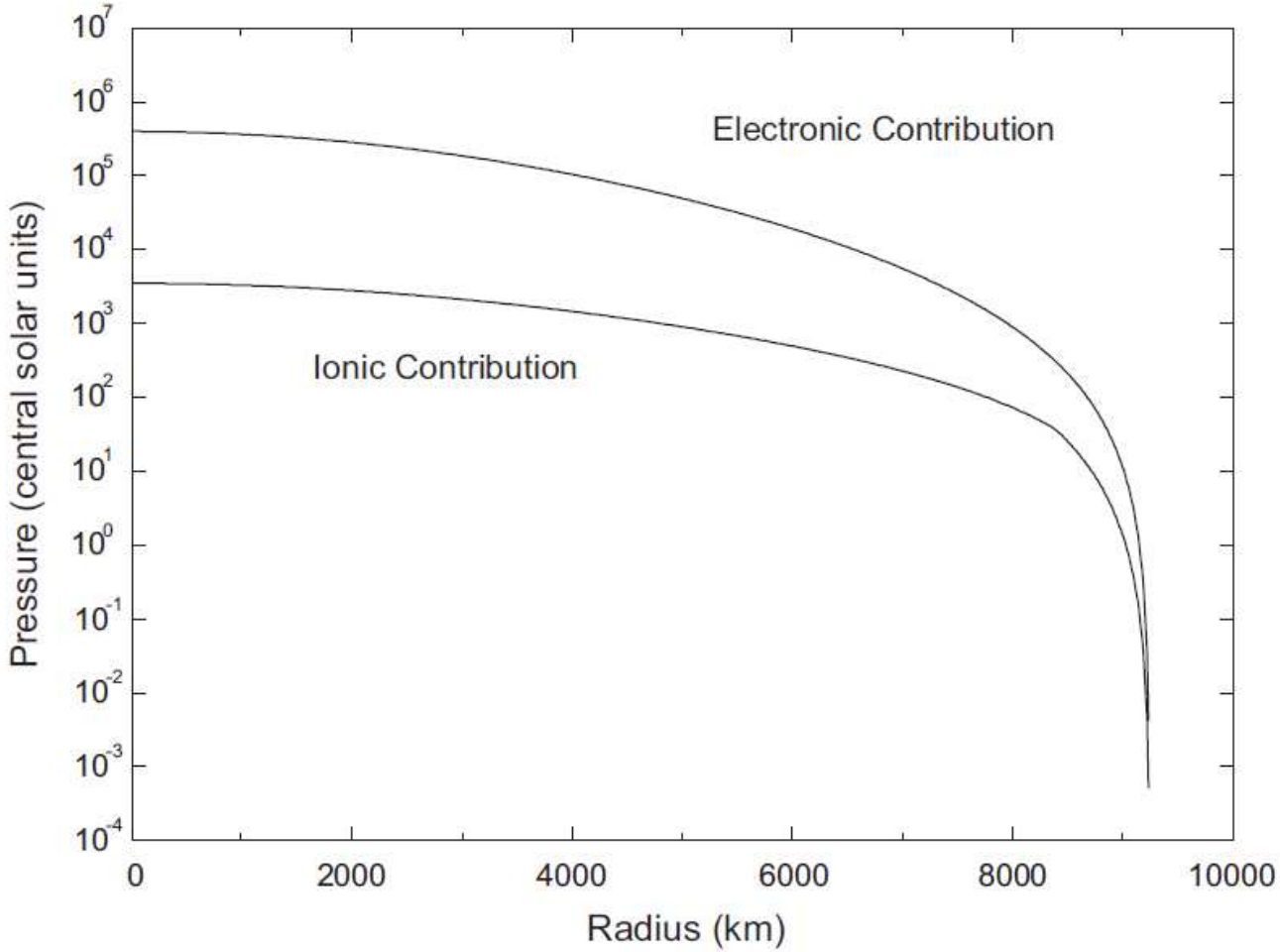
Pressão e energia interna devidos básicamente ao gás de elétrons livres

- $N_p = N_e$. Carga elétrica global nula ($Q = 0$): energia esletrostática ~ 0
- Energia térmica ($P \sim \sigma T^4$) e contribuição dos íons desprezíveis
- Interação fraca (processo Urca):

$$\begin{aligned} (Z, A) + e^- &\rightarrow (Z-1, A) + \nu_e \\ (Z-1, A) &\rightarrow (Z, A) + e^- + \overline{\nu}_e \end{aligned}$$

Correção eletrostática da rede cristalina (Salpeter, 1961):

- $\frac{E_R}{Z} = -\frac{9}{10}\left(\frac{4\pi}{3}\right)^{1/3} Z^{2/3} e^2 n_e^{2/3}$
- $P_R = n_e^2 \frac{\partial (E_R/Z)}{\partial n_e} \rightarrow P_R = -\frac{3}{10}\left(\frac{4\pi}{3}\right)^{1/3} Z^{2/3} e^2 n_e^{4/3}$


Electronic Contribution
Ionic Contribution
Pressure (central solar units)
Radius (km)
10^{7}
10^{6}
10^{5}
10^{4}
10^{3}
10^{2}
10^{1}
10^{0}
10^{-1}
10^{-2}
10^{-3}
10^{-4}
0
2000
4000
6000
8000
10000

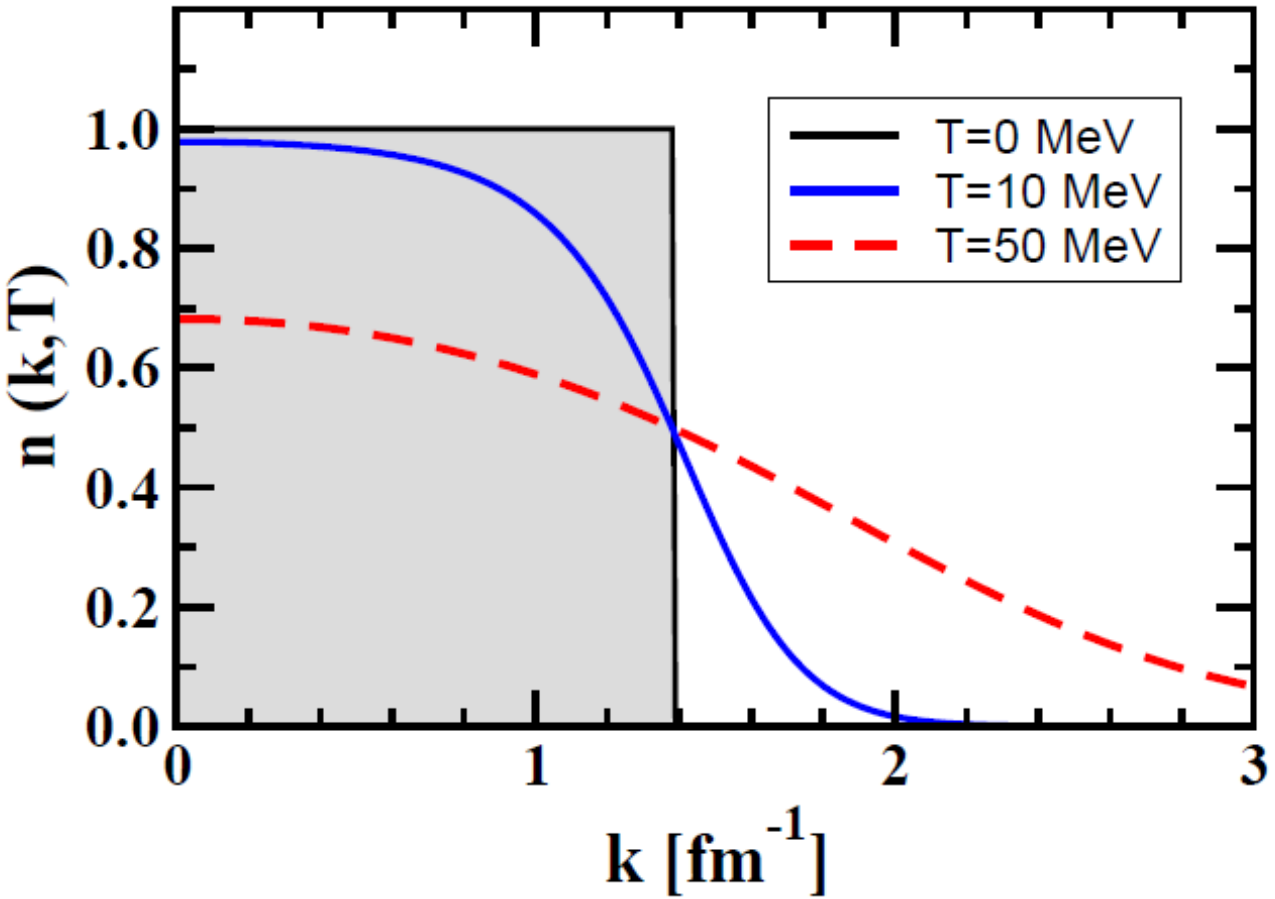
A interação forte não participa (baixas densidades!)

- Interação nuclear curto alcance $\sim 2.2\,fm$ ($1\,fm = 10^{-13}\,cm$)
- Distância média entre os núcleos: $\Delta x \approx n_N^{-1/3}$ (n_N número de nucleons por unidade de volume)
- $n_N = \frac{\rho}{m_N}$ (m_N massa do nucleon $= 1.674 \times 10^{-24}\,g$)
- $\Delta x = \left(\frac{m_N}{\rho}\right)^{1/3}$
- $\rho_c \sim 10^6\,gcm^{-3}$: $\Delta x = 1.2 \times 10^{-10}\,cm \simeq 1000\,fm$
- $\rho_c \sim 10^8\,gcm^{-3}$: $\Delta x \simeq 200\,fm$

Gás Ideal de Fermi

- Função de partição:
  $Z(V,\beta,\mu) = \prod_q \left(1 + ze^{-\beta\epsilon_q}\right), \;\; \beta = 1/kT, \;\; z = e^{\beta\mu}$
- Número de férmions no sistema:
  $N = \frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial\mu}\ln Z = \sum_q n_q, \;\; n_q = \frac{1}{z^{-1}e^{\beta\epsilon_q}+1}$
- Pressão: $pV = \frac{1}{\beta}\ln Z = \frac{1}{\beta}\sum_q \ln\left[ze^{-\beta\epsilon_q}+1\right]$
- Energia interna: $E = -\frac{\partial}{\partial\beta}\ln Z = \sum_q \frac{1}{z^{-1}e^{\beta\epsilon_q}+1}$
- $\sum_q \to \frac{g}{\hbar^3}\int d^3r \int d^3k = g\frac{V}{\hbar^3}\int d^3k$
- $g = 2S+1$ (degenerescência de spin)

  Obtemos:
- $n = \frac{g}{2\pi^2\hbar^3}\int_0^\infty \frac{k^2}{z^{-1}e^{\beta\epsilon}+1}dk$
- $p = \frac{g}{6\pi^2\hbar^3}\int_0^\infty \frac{k^3}{z^{-1}e^{\beta\epsilon}+1}\frac{\partial\epsilon}{\partial k}dk$
- $\varepsilon = \frac{g}{2\pi^2\hbar^3}\int_0^\infty \frac{k^2}{z^{-1}e^{\beta\epsilon}+1}\epsilon dk$


T=0 MeV
T=10 MeV
T=50 MeV
n (k,T)
k [fm^{-1}]
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
0
1
2
3

Gás de Fermi Degenerado

- Energia da partícula: $\epsilon = \sqrt{k^2c^2 + m^2c^4}$
- No limite $\mu/kT \to \infty$, a distribuição de Fermi admite apenas dois valores possíveis: $n = 1$ se $\epsilon \leq \epsilon_F$ e $n = 0$ se $\epsilon > \epsilon_F$
- ϵ_F é a energia de Fermi: $\epsilon_F = \sqrt{k_F^2c^2 + m^2c^4}$, sendo k_F o momento de Fermi.
- Num sistema degenerado, ϵ_F e k_F são funções unicamente da densidade de partídulas n.
- $n = \frac{g}{2\pi^2\hbar^3}\int_0^{k_F} k^2 dk = \frac{g}{6\pi^2}\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^3 x^3$
- $p = \frac{g}{6\pi^2\hbar^3}c^2\int_0^{k_F}\frac{k^4}{\epsilon}dk = \frac{gm^4c^5}{2\hbar^3}\phi(x)$
- $\varepsilon = \frac{g}{2\pi^2\hbar^3}\int_0^{k_F}\epsilon k^2 dk = \frac{gm^4c^5}{2\hbar^3}\chi(x)$

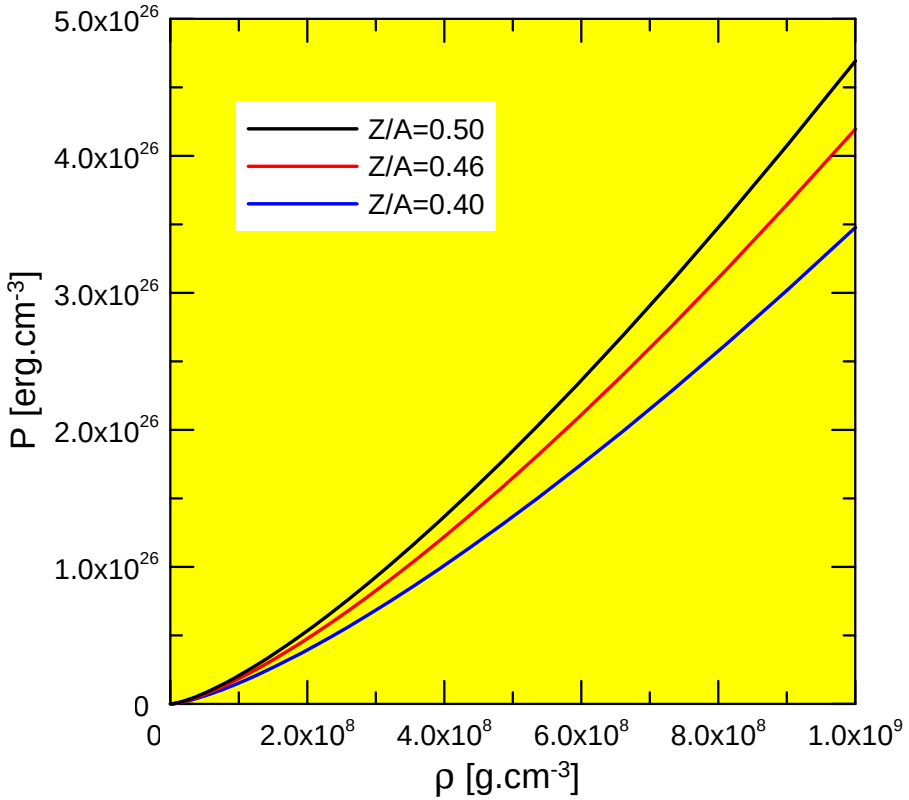
Onde

- $x \equiv \frac{k_F}{mc}$ (parâmetro relatividade)
- $\phi(x) = \frac{1}{8\pi^2}\left\{x\left(\frac{2}{3}x^2 - 1\right)\left(1+x^2\right)^{1/2} + \ln\left[x + \left(1+x^2\right)^{1/2}\right]\right\}$
- $\chi(x) = \frac{1}{8\pi^2}\left\{x\left(1+2x^2\right)\left(1+x^2\right)^{1/2} - \ln\left[x + \left(1+x^2\right)^{1/2}\right]\right\}$
- É fácil ver que $k_F = (3\pi^2\hbar^3)^{1/3} n^{1/3}$ e $\epsilon_F = mc^2(1+x)^2$

Gás de elétrons degenerado ($g = 2$):

$$p = 1.42180 \times 10^{25}\phi(x)\,\mathrm{erg}\cdot\mathrm{cm}^{-3}$$

$$\varepsilon = 1.42180 \times 10^{25}\chi(x)\,\mathrm{erg}\cdot\mathrm{cm}^{-3}$$


5.0x10^26
4.0x10^26
3.0x10^26
2.0x10^26
1.0x10^26
0
P [erg.cm^-3]
Z/A=0.50
Z/A=0.46
Z/A=0.40
0
2.0x10^8
4.0x10^8
6.0x10^8
8.0x10^8
1.0x10^9
ρ [g.cm^-3]

Limite não-relativístico ($x \ll 1$):

$$\phi(x) \to \frac{1}{15\pi^2}\left(x^5 - \frac{5}{14}x^7 + \frac{5}{24}x^9 + \ldots\right)$$

$$\chi(x) \to \frac{1}{3\pi^2}\left(x^3 + \frac{3}{10}x^5 - \frac{3}{56}x^7 + \ldots\right)$$

Limite ultra-relativístico ($x \gg 1$):

$$\phi(x) \to \frac{1}{12\pi^2}\left(x^4 - x^2 + \frac{3}{2}\ln 2x + \ldots\right)$$

$$\chi(x) \to \frac{1}{4\pi^2}\left(x^4 + x^2 - \frac{1}{2}\ln 2x + \ldots\right)$$

- No primeiro caso, considerando apenas o termo dominante em x^5, a pressão ganha a forma $p \propto \rho^{5/3}$
- No limite relativístico, obtemos resultado análogo, $p \propto \rho^{4/3}$

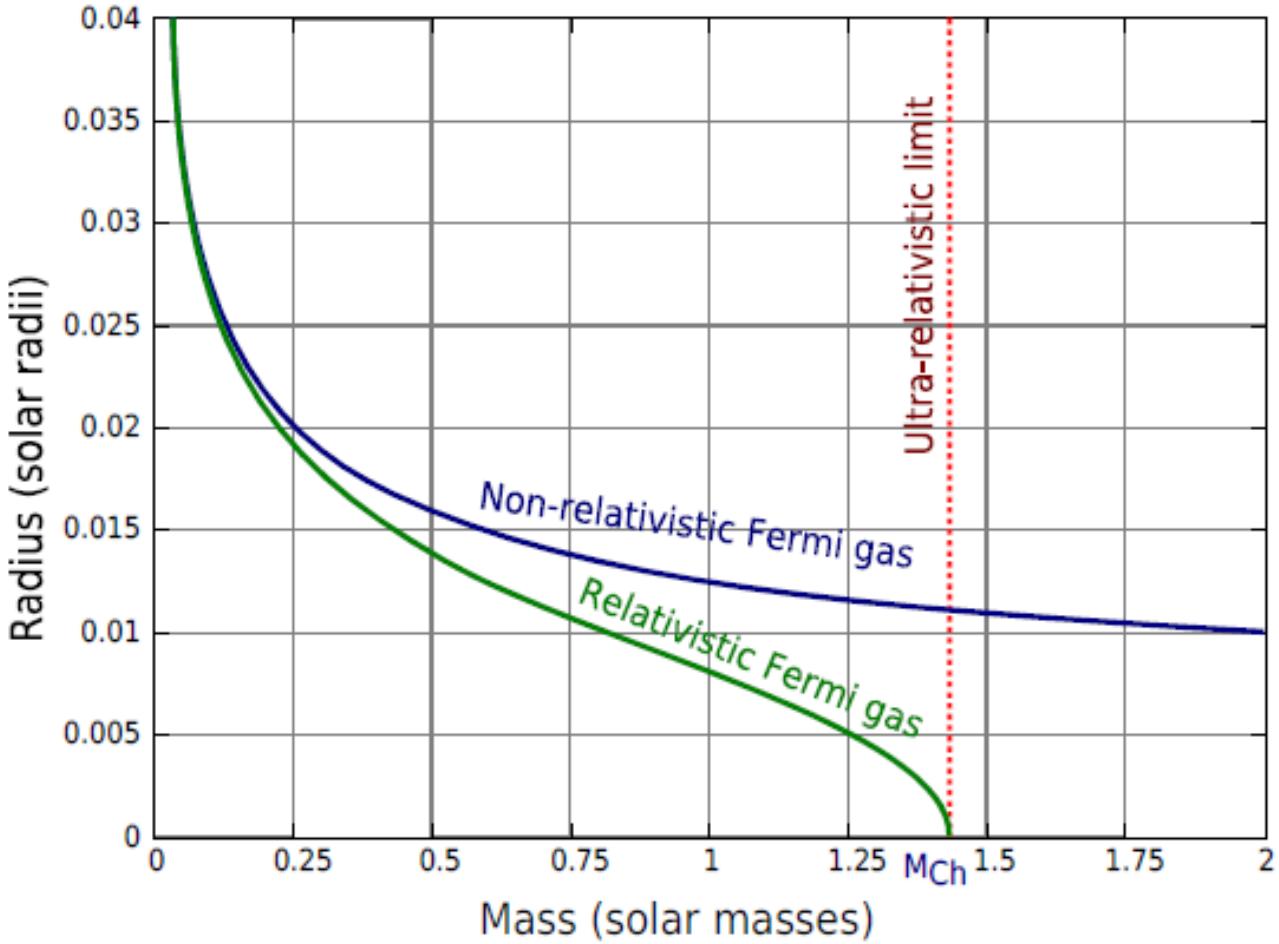
Resultados importantes para o limite UR:

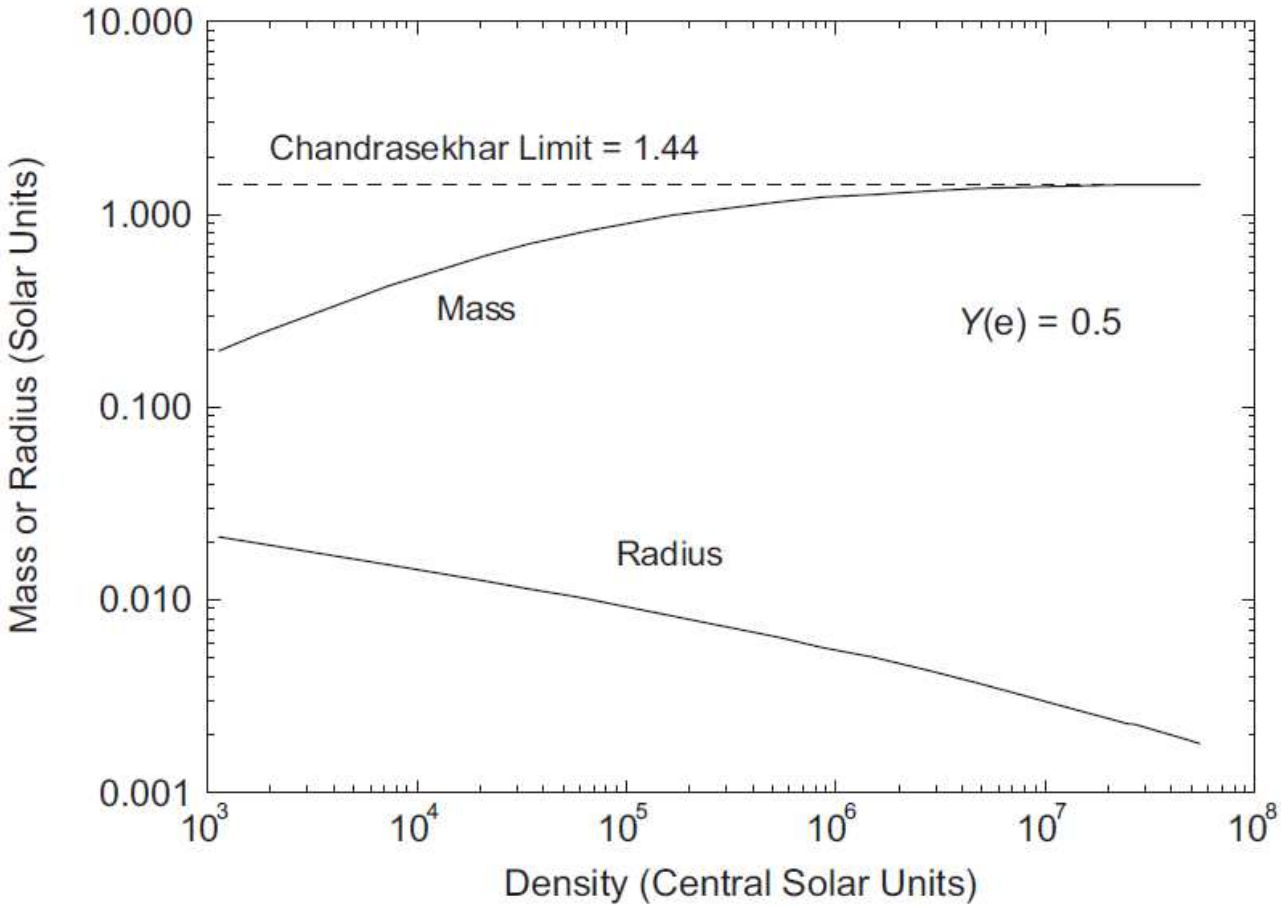
- $k_F = \left(\frac{6\pi^2}{g}\right)^{1/3} \hbar n^{1/3}$
- $\varepsilon = \frac{gc}{8\pi^2\hbar^3} k_F^4 = \frac{6^{4/3}}{8g^{1/3}} \pi^{2/3} \hbar c n^{4/3}$
- $p = \frac{1}{3}\epsilon$

A densidade de energia e pressão não dependem da massa do férmion.

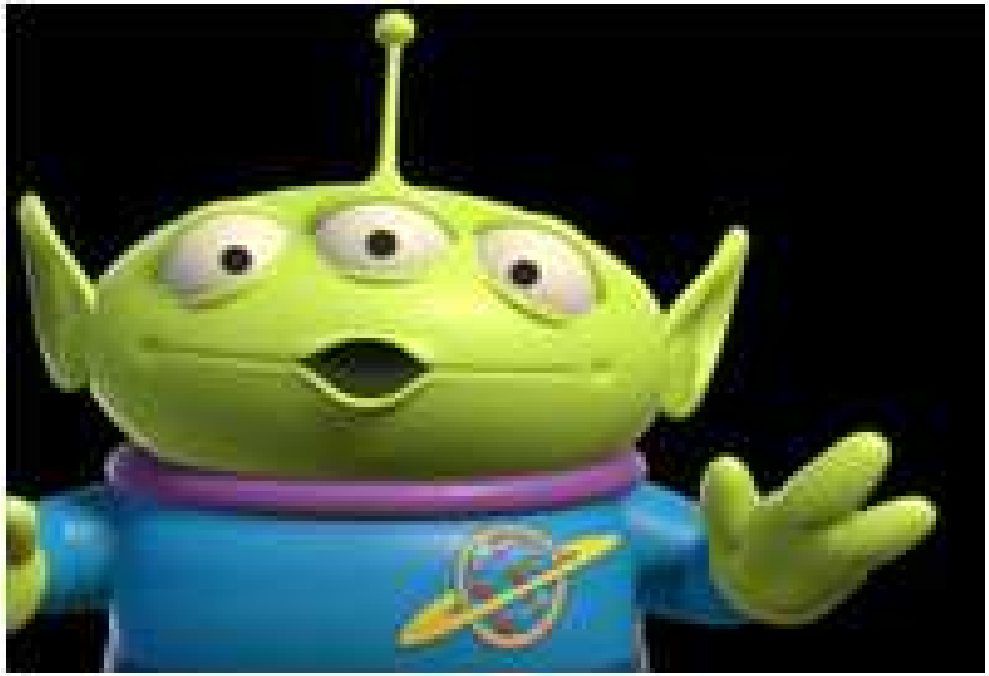
Em resumo, uma anã branca é composta basicamente de

- um plasma neutro composto por núcleos com número de massa A e número atômico Z: $Y_e = \frac{Z}{A}$
- densidade de elétrons: $n_e = \frac{Y_e \rho}{m_N}$
- então $x = \left(\frac{3\pi^2\hbar^3}{m_N m_e^3 c^3} Y_e \rho\right)^{1/3} \rightarrow x = \left(\frac{Y_e \rho}{10^6}\right)^{1/3}$ cgs
- vemos que o limite não-relativístico ocorre para densidades $\rho \ll 10^6 / Y_e$
- para $\rho \gg 10^6 / Y_e$ o gás torna-se predominantemente relativístico.


0.04
0.035
0.03
0.025
0.02
0.015
0.01
0.005
0
Radius (solar radii)
0
0.25
0.5
0.75
1
1.25
1.5
1.75
2
Mass (solar masses)
Ultra-relativistic limit
Non-relativistic Fermi gas
Relativistic Fermi gas
MCh

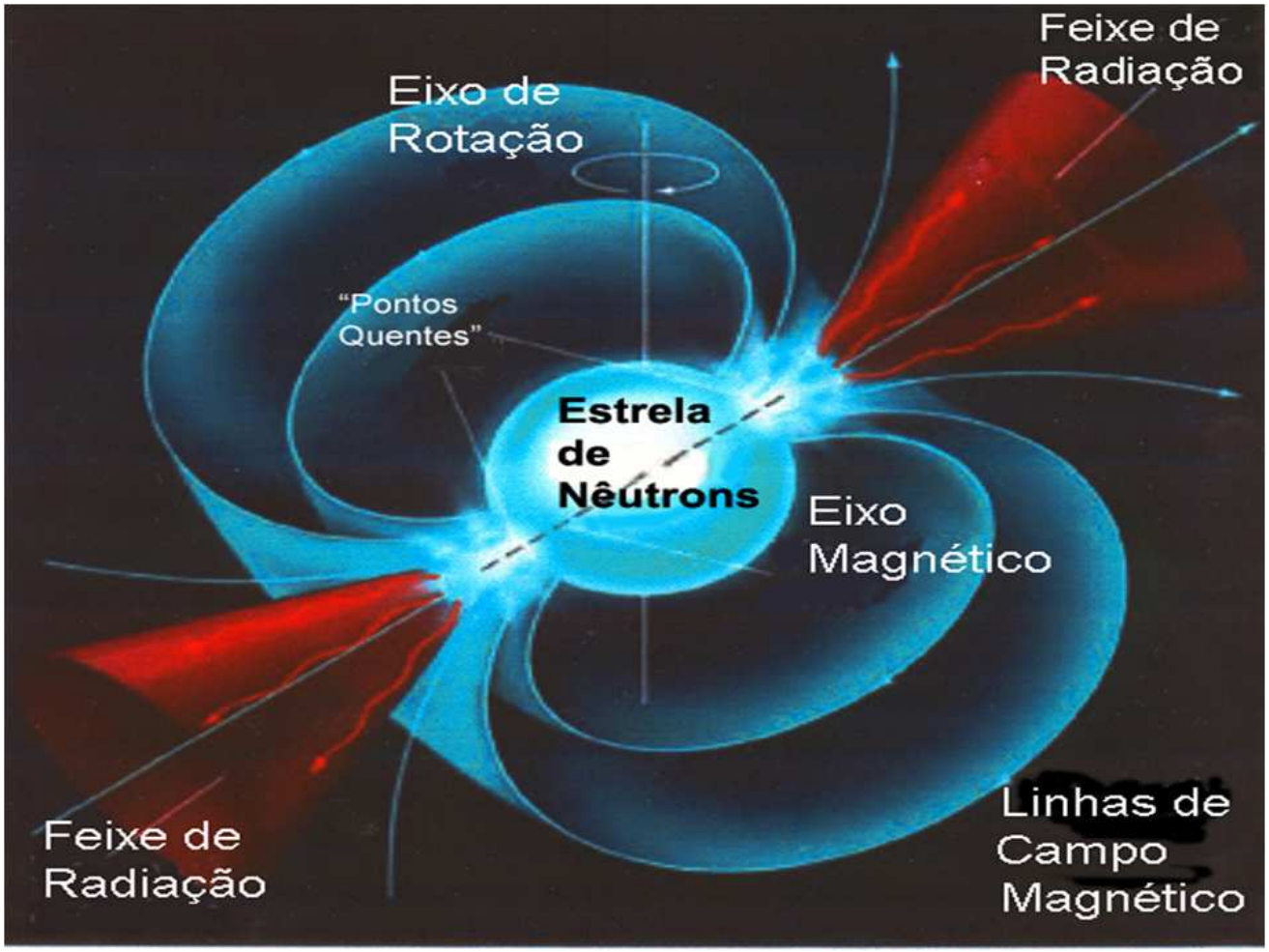

10.000
1.000
0.100
0.010
0.001
Mass or Radius (Solar Units)
Chandrasekhar Limit = 1.44
Mass
Y(e) = 0.5
Radius
10^3
10^4
10^5
10^6
10^7
10^8
Density (Central Solar Units)

Descoberta dos Pulsares



Descoberta dos Pulsares

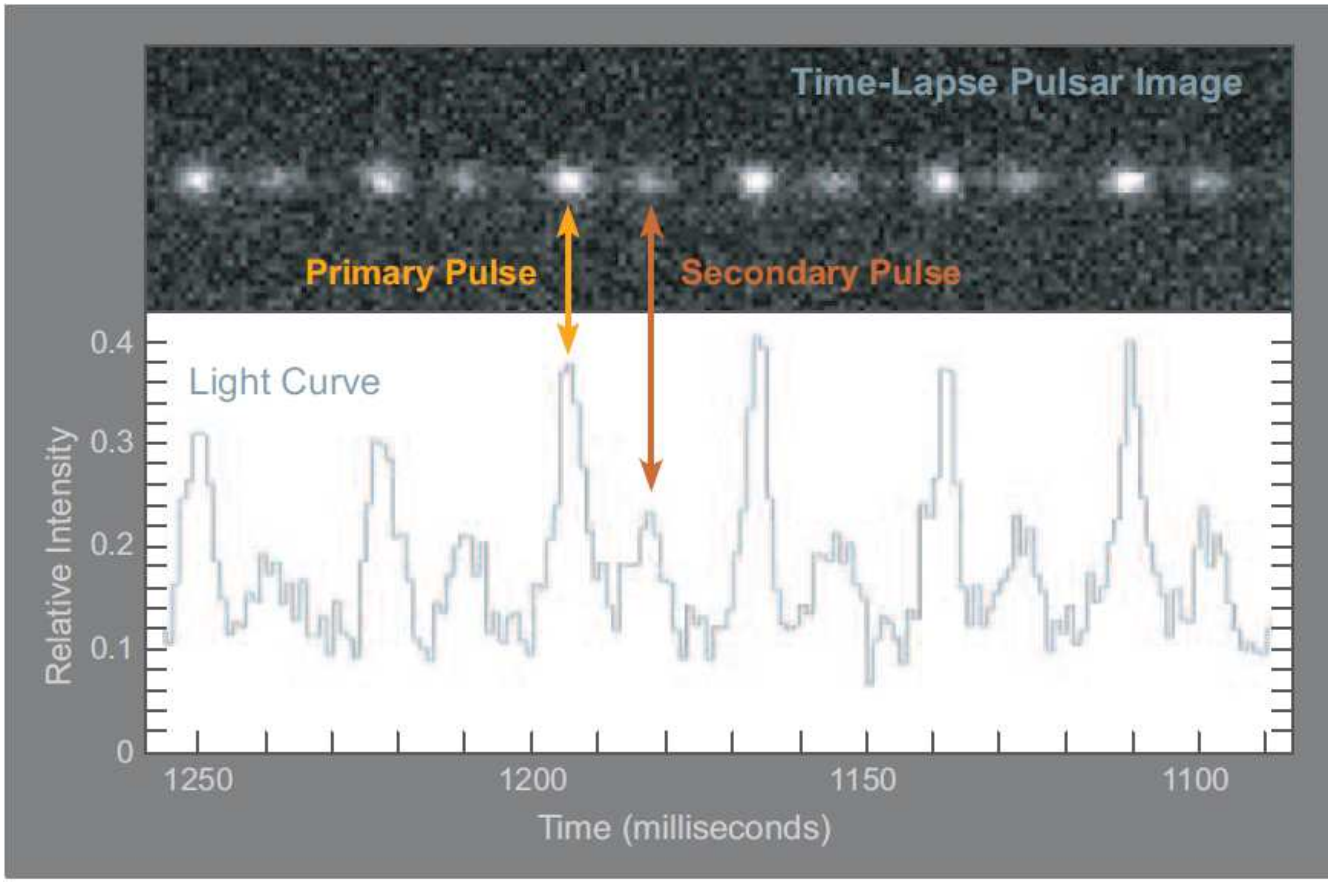
- Primeiro pulsar (PSR 1919+21) descoberto em 1967 por Jocelyn Bell. Sinais de rádio com pulsos de período de 1.3373 s. Mais de 1300 observados
- Os pulsares foram logo associados às estrelas de nêutron
- Campo magnético: $10^{10}\ G < B < 10^{13}\ G$. Terra: $\sim 0.3\ G$. Sol: $\sim 1\ G$
- Elétrons são acelerados na direção dos polos magnéticos, emitindo radiação eletromagnética (desde ondas de rádio até raios gama)
- Emissão de ondas gravitacionais
- Magnetares: estrelas de nêutron com campos ainda mais intensos ($10^{14}\ G < B < 10^{15}\ G$)


Feixe de
Radiação
Eixo de
Rotação
"Pontos
Quentes"
Estrela
de
Nêutrons
Eixo
Magnético
Feixe de
Radiação
Linhas de
Campo
Magnético

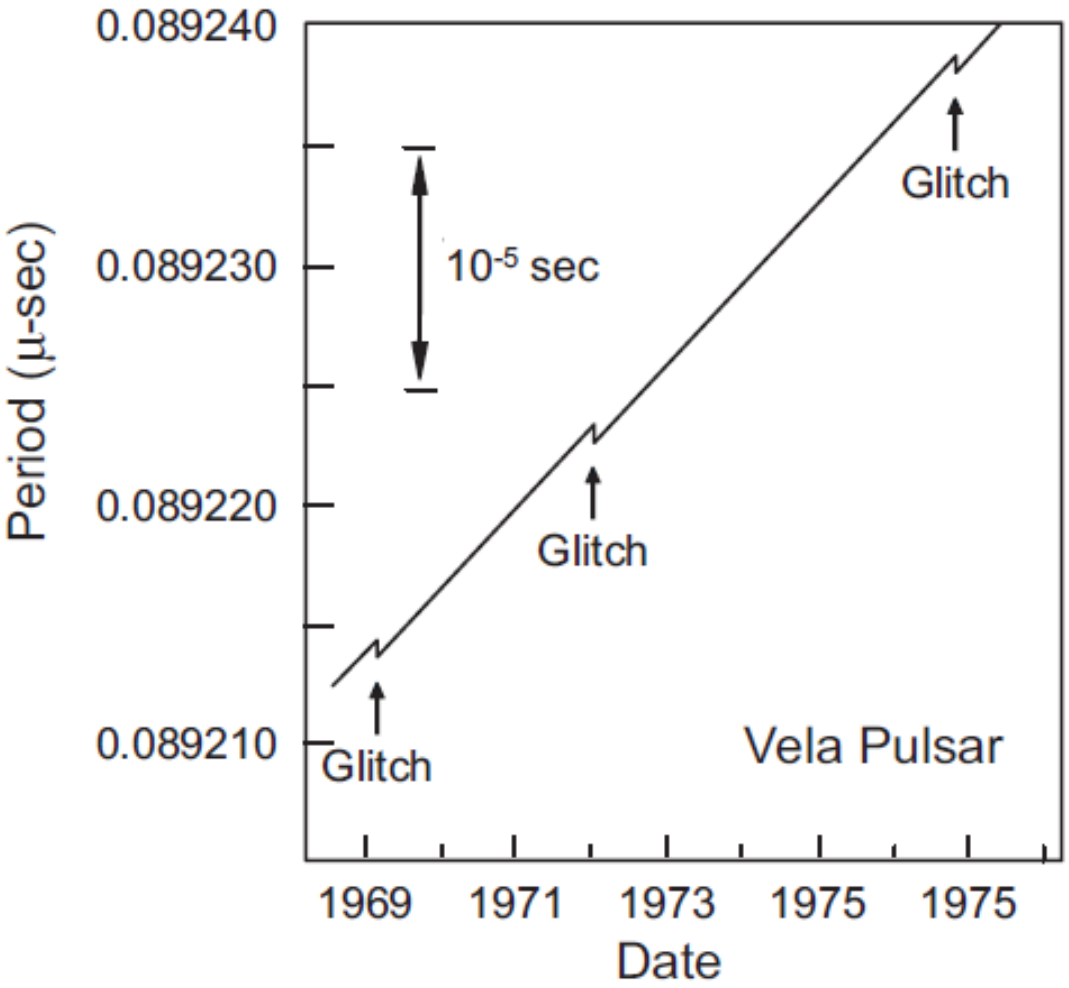
Evidências observacionais

- Pulsares têm períodos medidos entre 1,6 ms e 4,3 s
- Os períodos apresentam um aumento gradual ("spin-down"). $\sim 10^6$ anos
- O período diminui ocasionamente com soluços ("glitchs")
- Acredita-se que o "spin-down" seja devido à transformação de energia rotacional em energia EM e à emissão de ondas gravitacionais

Pulsar de Caranguejo

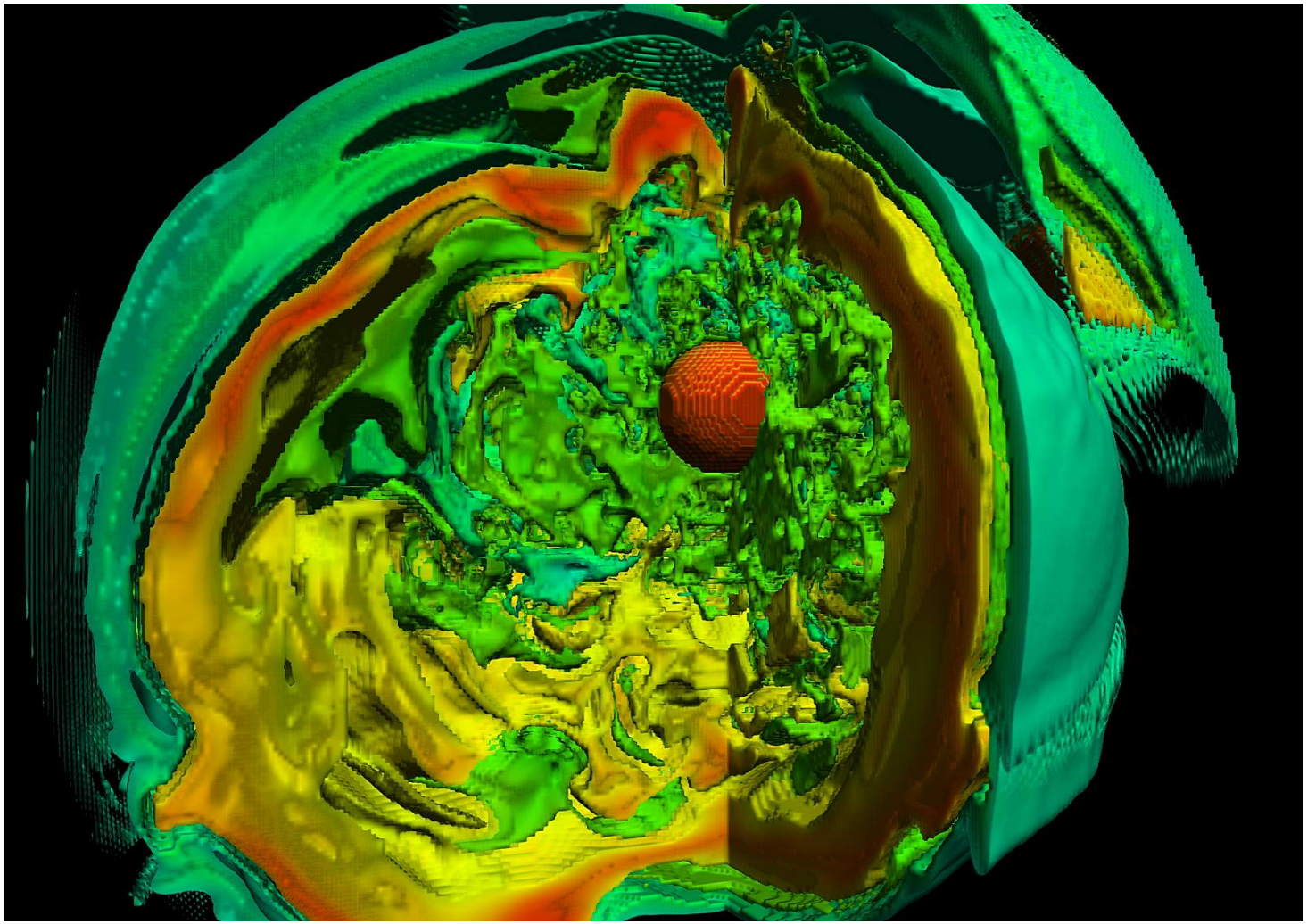


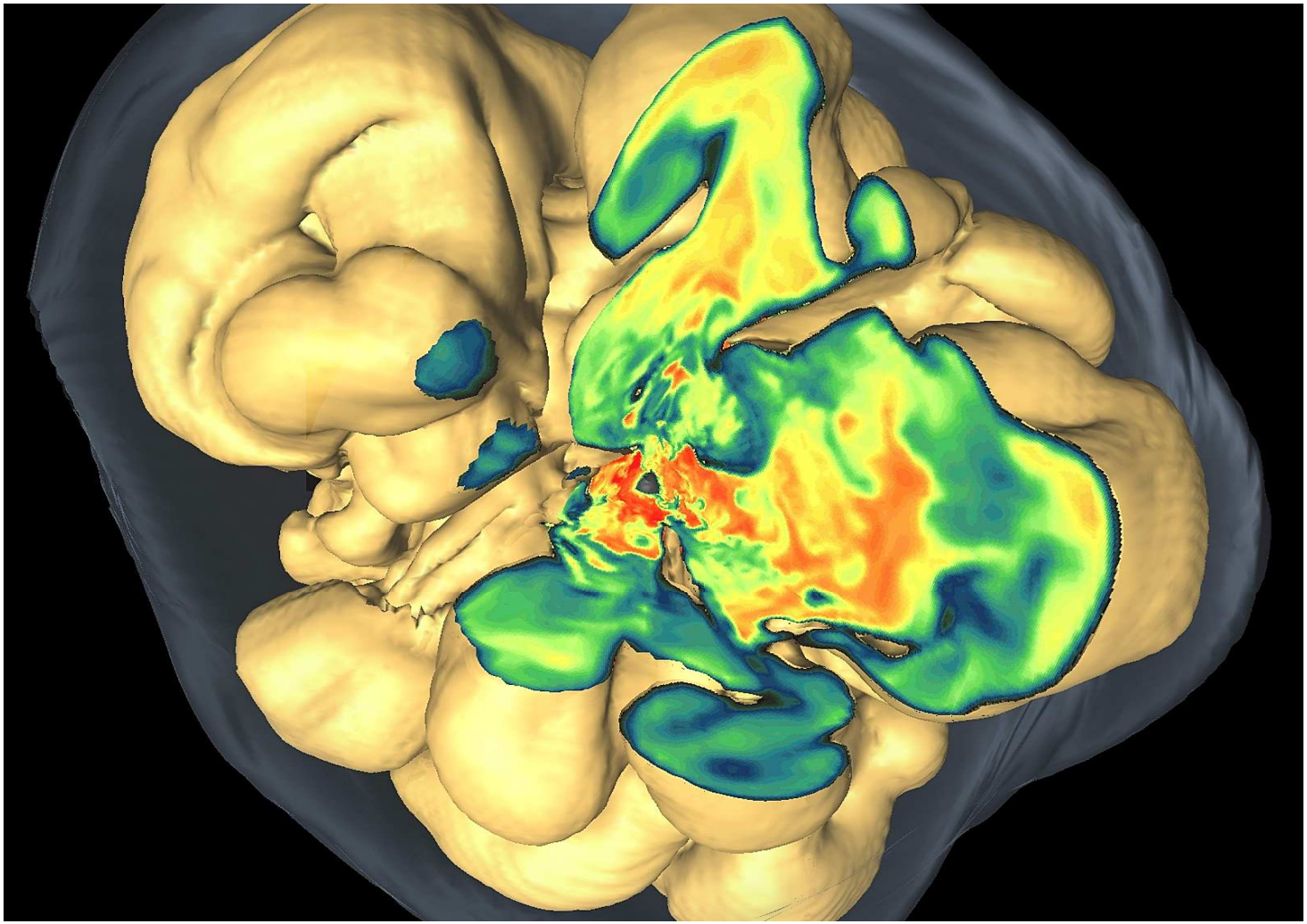
Pulsar de Vela

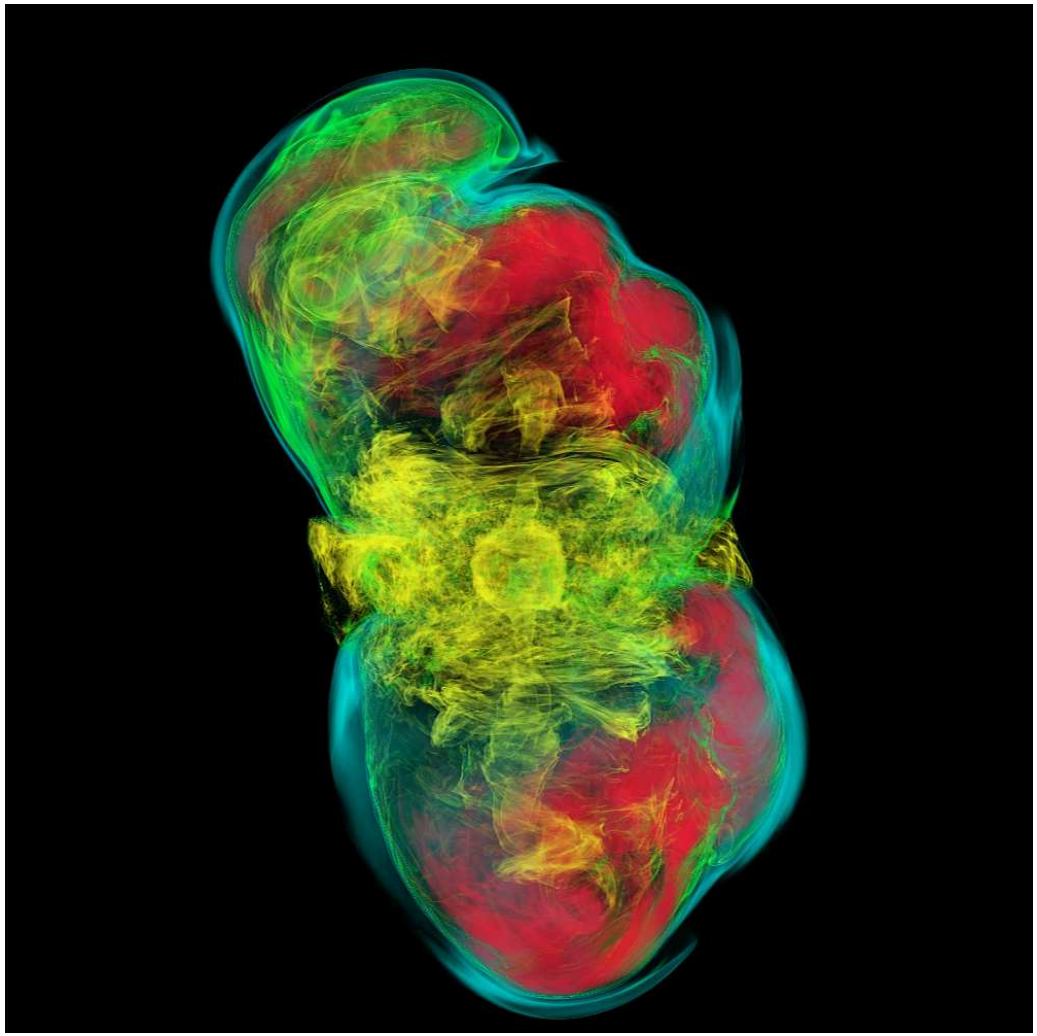


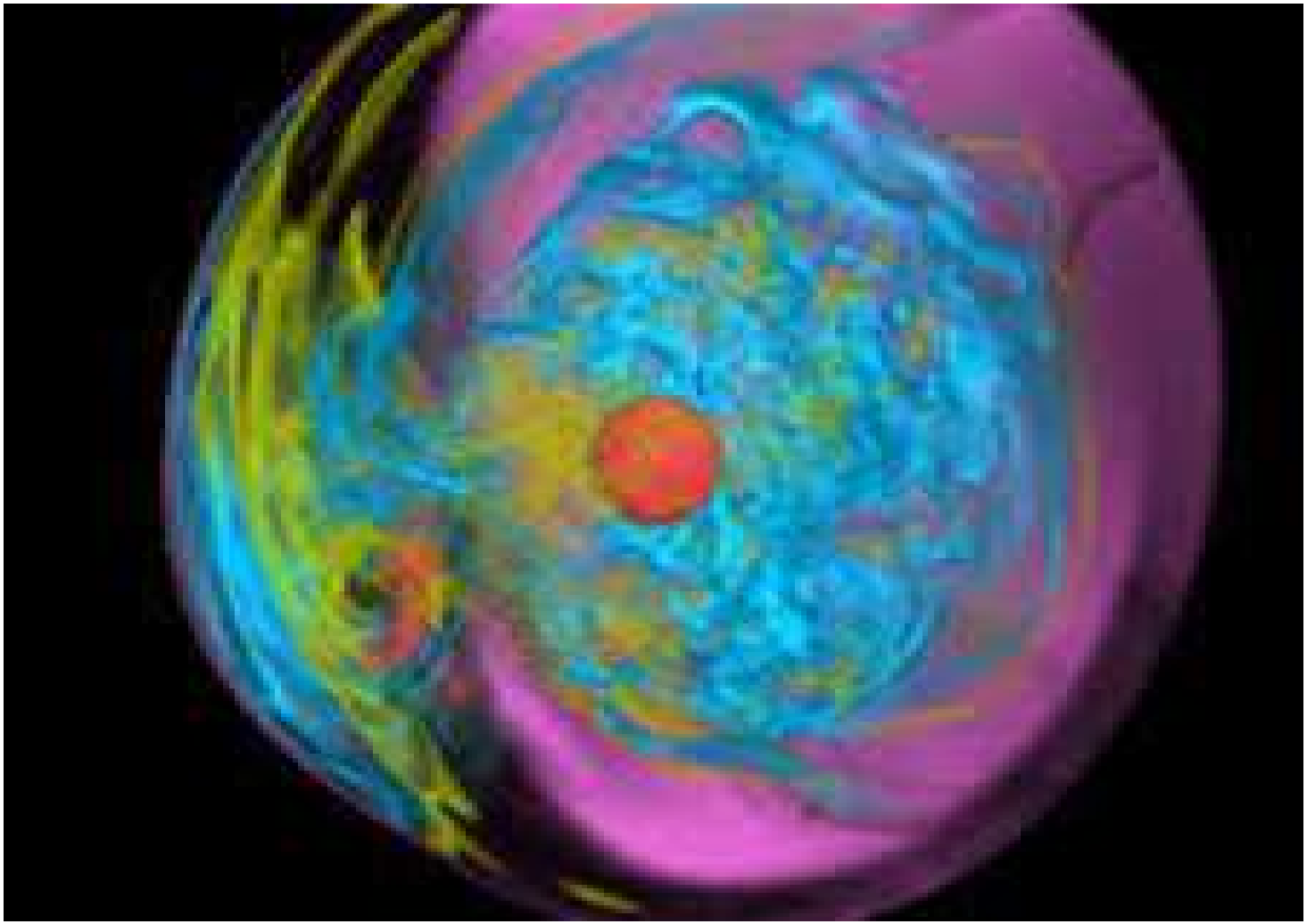
Ejeção de Pulsares

- Observa-se que certas estrelas de nêutron ao nascerem não se movem com a mesma velocidade da estrela progenitora
- São observadas velocidades entre 200 e 500 km/s.
- Entretanto, foram observadas velocidades de até 1.500 km/s
- Nebulosa da Guitarra: $v = 800\ km/s$
- Possível causa: acentuada assimetria durante a explosão da supernova









Estutura da Estrela de Nêutron

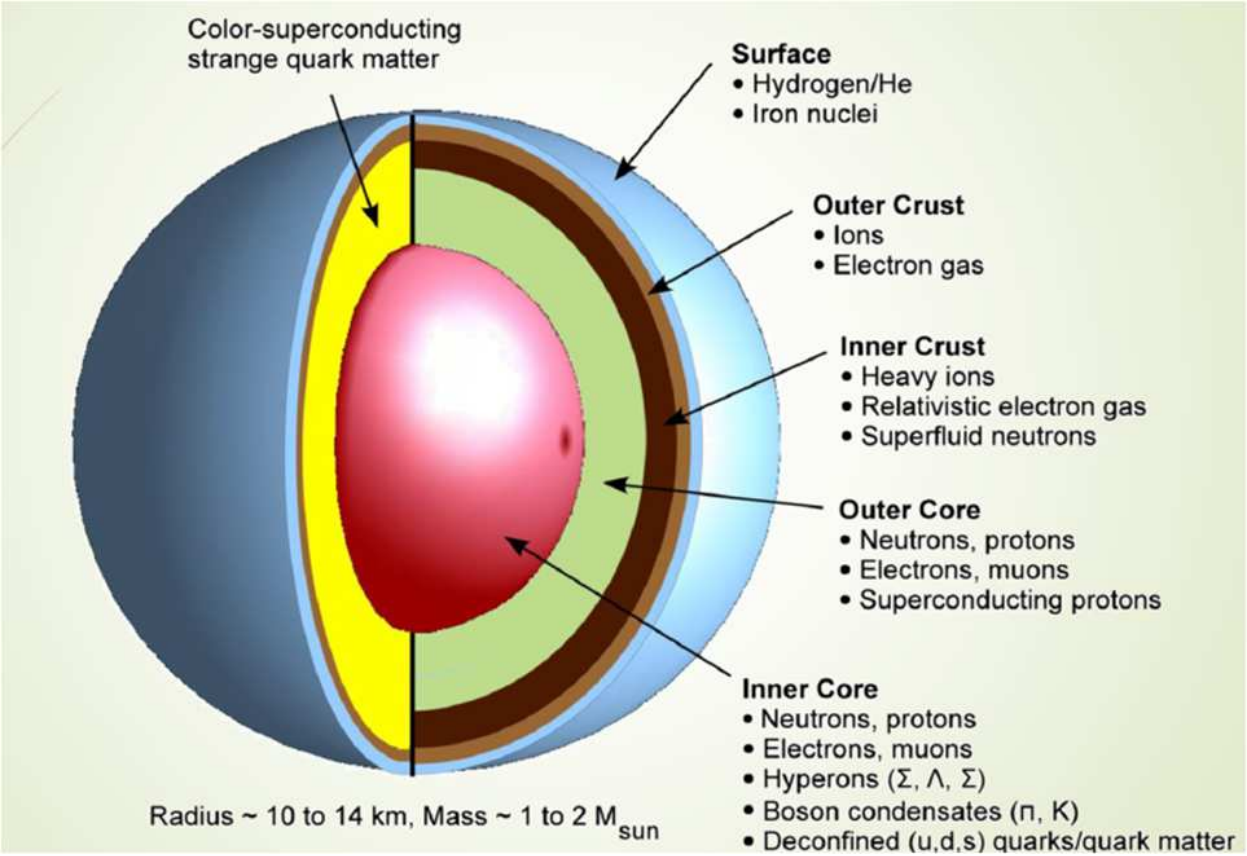
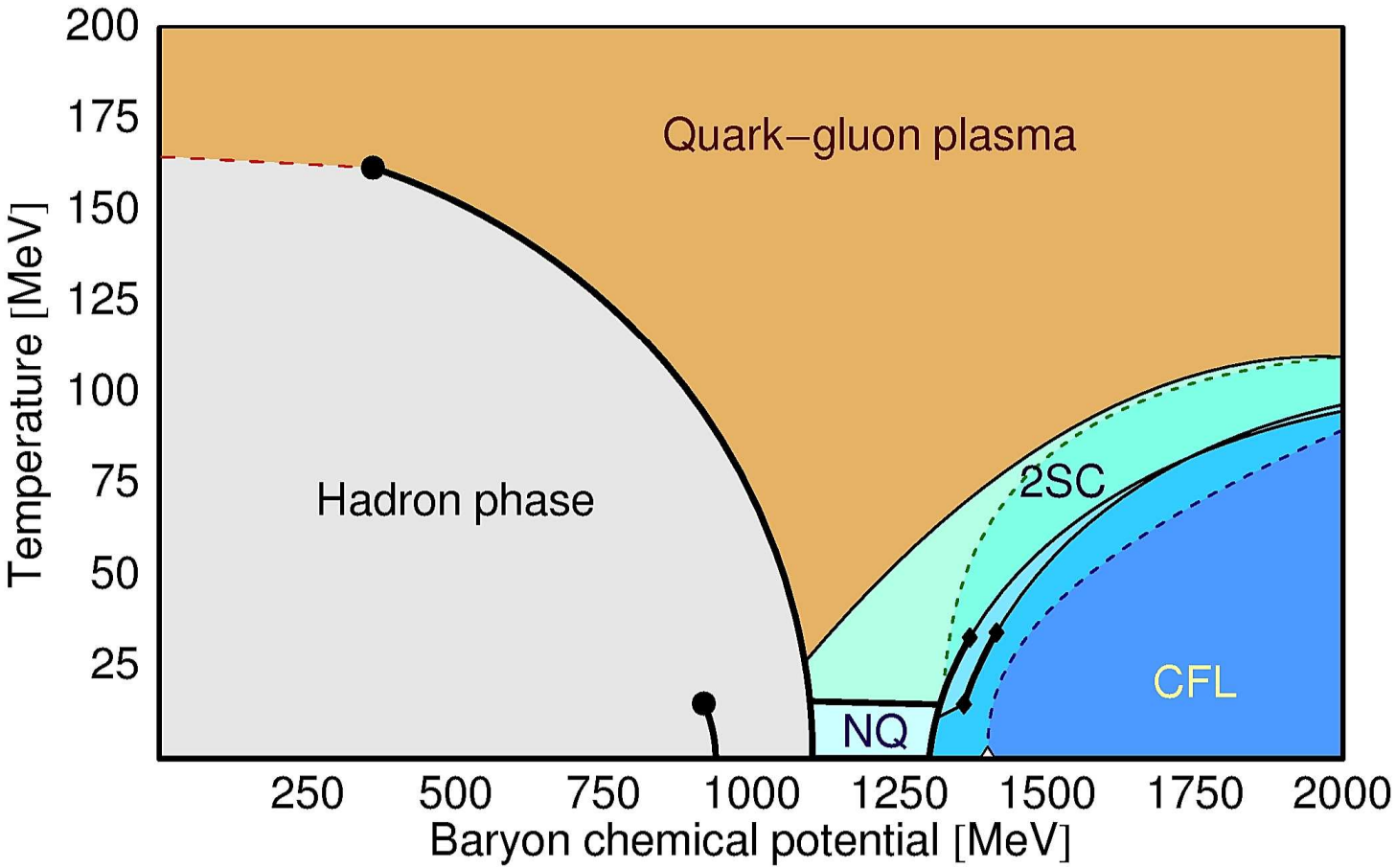


Diagrama de Fase



Características

- massa $\lessapprox 2\,M_\odot$
- raio ≈ 10 a $20\,km$
- número de bárions $\approx 10^{57}$
- densidade central 1 a $8\rho_0$ ($\rho_0 = 2,5 \times 10^{14}$ g/cm^3)
- matéria rica em nêutrons
- pesença de partículas exóticas e com estranhesa: Λ, Σ, Ξ, Δ
- crosta (≈ 100 m) formada por uma rede cristalina formada por núcleos atômicos
- existência de quarks desconfinados nas regiões centrais (?)
- emissão de ondas gravitacionais

Velocidade de Escape/Red shift

Na superfície da estrela

- $g \approx \frac{GM}{R^2}$, $\frac{v_{esc}}{c} \approx \sqrt{\frac{2GM}{Rc^2}}$ e red shift $z = \left(1 - \frac{2GM}{Rc^2}\right)^{-1/2} - 1$

Anã branca típica ($M \approx 1\ M_\odot$ e $R \approx 10^9\ cm$):

- $g \approx 10^8\ cm/s^2$, $\frac{v_{esc}}{c} \approx 0.02$ e $z \approx 1.5 \times 10^{-4}$

Estrela de nêutron ($M \approx 1\ M_\odot$ e $R \approx 10^6\ cm$):

- $g \approx 10^{14}\ cm/s^2$, $\frac{v_{esc}}{c} \approx 0.6$ e $z \approx 0.2$

Esses números mostram que correções da relatividade geral são importantes para estrelas de nêutron massivas, mas podem ser desprezadas para o cálculo de estrutura das anãs brancas.

Equações Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV)

Trabalhos pioneiros:

- Tolman, R. C. (1939) **Static solutions of Einstein's field equations for spheres of fluid**, Phys. Rev. 55, 364
- Oppenheimer J. R. and Volkoff G. M. (1939) **On massive neutron cores**, Phys. Rev. 55, 374

Simetria esférica estacionária ($J = 0$). Métrica de Schwarzschild:

$$ds^2 = e^{\nu(r)}c^2dt^2 - e^{\lambda(r)}dr^2 - r^2d\theta^2 - r^2\sin^2\theta d\phi^2; \;\; \lambda = \lambda(r), \;\; \nu = \nu(r)$$

Fluido perfeito: $T_{\mu\nu} = (\frac{p}{c^2} + \rho)u_\mu u_\nu + pg_{\mu\nu}$. Para um fluido em repouso:

$$T_{00} = \rho, \quad T_{11} = T_{22} = T_{33} = -p$$

Equações de Einstein:

$$G_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \tag{1}$$

FEBRUARY 15, 1939 PHYSICAL REVIEW VOLUME 55

Static Solutions of Einstein's Field Equations for Spheres of Fluid

RICHARD C. TOLMAN
Norman Bridge Laboratory of Physics, California Institute of Technology, Pasadena, California
(Received January 3, 1939)

A method is developed for treating Einstein's field equations, applied to static spheres of fluid, in such a manner as to provide explicit solutions in terms of known analytic functions. A number of new solutions are thus obtained, and the properties of three of the new solutions are examined in detail. It is hoped that the investigation may be of some help in connection with studies of stellar structure. (See the accompanying article by Professor Oppenheimer and Mr. Volkoff.)

FEBRUARY 15, 1939 PHYSICAL REVIEW VOLUME 55

On Massive Neutron Cores

J. R. OPPENHEIMER AND G. M. VOLKOFF
Department of Physics, University of California, Berkeley, California
(Received January 3, 1939)

It has been suggested that, when the pressure within stellar matter becomes high enough, a new phase consisting of neutrons will be formed. In this paper we study the gravitational equilibrium of masses of neutrons, using the equation of state for a cold Fermi gas, and general relativity. For masses under $\frac{1}{3}\odot$ only one equilibrium solution exists, which is approximately described by the nonrelativistic Fermi equation of state and Newtonian gravitational theory. For masses $\frac{1}{3}\odot < m < \frac{3}{4}\odot$ two solutions exist, one stable and quasi-Newtonian, one more condensed, and unstable. For masses greater than $\frac{3}{4}\odot$ there are no static equilibrium solutions.

Equações TOV:

$$\frac{dp(r)}{dr} = -\frac{G}{r^2}\left[\rho(r)+\frac{p(r)}{c^2}\right]\left[m(r)+4\pi r^3\frac{p(r)}{c^2}\right]\left[1-\frac{2Gm(r)}{rc^2}\right]^{-1}$$

$$\frac{dm(r)}{dr} = 4\pi\rho(r)r^2$$

$r \rightarrow$ coordenada radial
$\rho(r) \rightarrow$ densidade de energia no ponto r
$p(r) \rightarrow$ pressão no ponto r

Quando os termos em $1/c^2$ são desprezíveis, obtemos

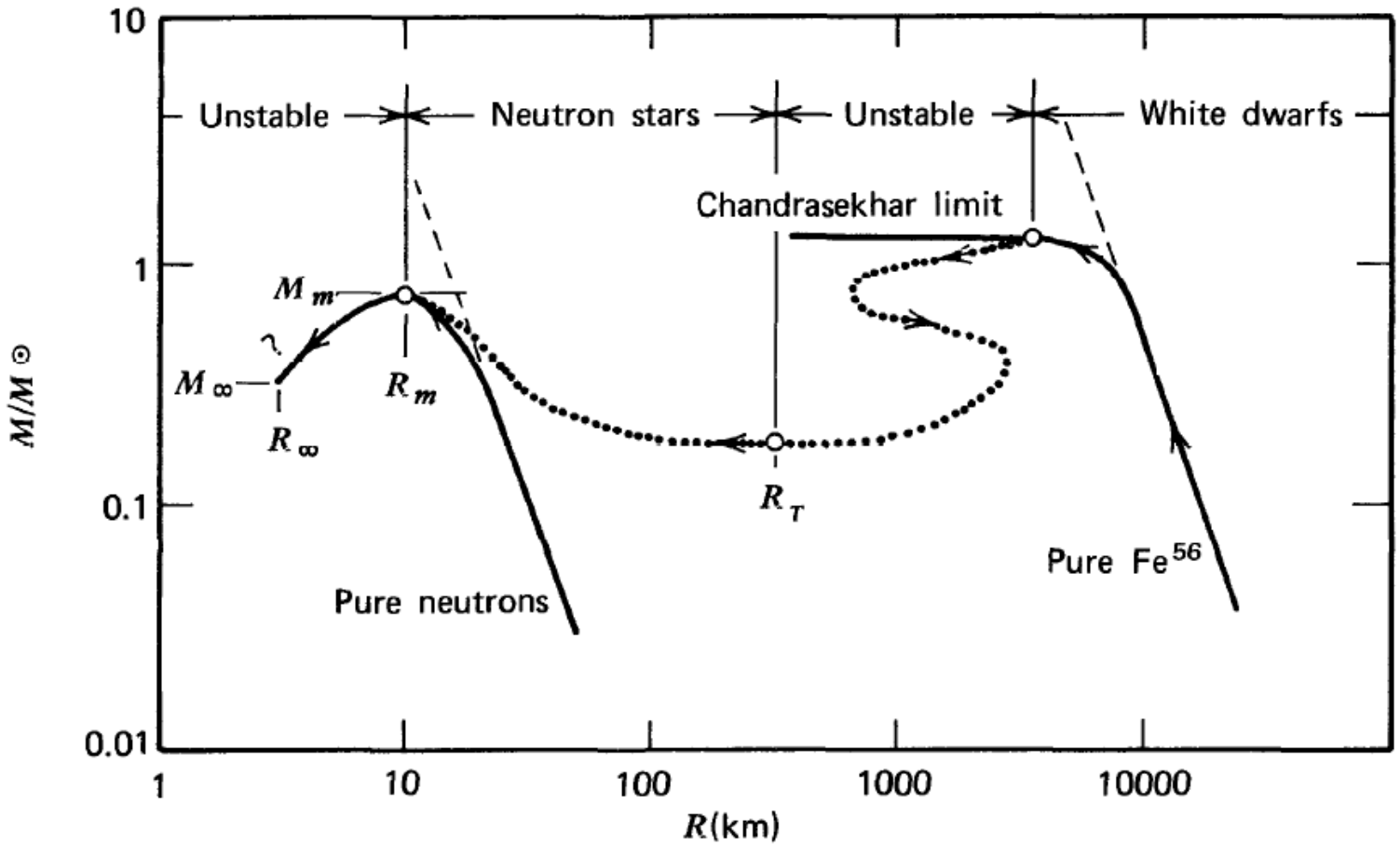
$$\frac{dp(r)}{dr} = -\frac{G\rho(r)m(r)}{r^2}$$

Integração numérica das Equações TOV

- passo de integração: Δr
- entrar com $\rho_c = \rho(r = 0)$ (densidade central)
- $p_c = p(r = 0)$ (pressão central)
- a integração da TOV1 no primeiro passo fornece $p(r + \Delta r)$
- a integração da TOV2 no primeiro passo fornece $m(r + \Delta r)$
- a equação de estado fornece $\rho(r + \Delta r)$
- raio da estrela: definido pelo valor de r $(R = r)$ quando $p = 0$ (superfície da estrela)
- massa da estrela: valor de m quando $p = 0$ $(M = m(R))$

Equação de estado $f(p, \rho) = 0$ deve ser fornecida
Conhecida a equação de estado da matéria, as equações TOV podem ser integradas numericamente.

Gravitation and Cosmology, S. Weinberg



Um laboratório para a interação hadrônica

- densidade entre $\sim 1\,\rho_0$ e $\sim 10\,\rho_0$ no centro da estrela. $\rho_0 = 2.5 \times 10^{14}\, g/cm^3$ a densidade da matéria nuclear
- nas regiões centrais da estrela, os núcleos atômicos deixam de existir individualmente e se dissolvem em seus constituintes fundamentais
- forma-se um plasma de nucleons, elétrons, múons, mésons (K, π, etc), e partículas exóticas aparecem (Λ, Σ, Δ, Ξ)
- acredita-se que nas regiões centrais quarks u, d e s podem estar desconfinados, formando a matéria estranha

Equação de Estado para $\rho > \rho_{nuclear}$

- a equação de estado para densidades maiores que a densidade da matéria nuclear saturada não é conhecida
- calcular a equação de estado significa descrever a interação
- descrição das propriedades da matéria nuclear densa ($\rho > \rho_0$)
- modelos efetivos de interação hadrônica para a matéria nuclear: Modelo de Walecka, Thomas Fermi Relativístico, Potenciais Clássicos, etc
- modelos efetivos para a interação entre quarks: modelo da sacola do MIT, massa dependente da densidade, Nambu-Jona-Lasinio

Octeto Bariônico

Bárions	M (MeV)	Carga (e^-)	$\overrightarrow{J_s}$	$\overrightarrow{\tau}$	τ_3	S	Vida(s)
p	938.280	+1	1/2	1/2	+1/2	0	∞
n	939.573	0	1/2	1/2	-1/2	0	900
Λ	1115.6	0	1/2	0	0	-1	$2,63 \times 10^{-10}$
Σ^+	1189.4	+1	1/2	1	+1	-1	0.80×10^{-10}
Σ^0	1192.5	0	1/2	1	0	-1	6×10^{-20}
Σ^-	1197.3	-1	1/2	1	-1	-1	1.48×10^{-10}
Ξ^0	1314.9	0	1/2	1/2	+1/2	-2	2.90×10^{-10}
Ξ^-	1321.3	-1	1/2	1/2	-1/2	-2	1.64×10^{-10}

Teoria de campo médio relativística de Walecka

Campos	Spin	Isospin	Partículas	Massa
Ψ	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	Nucleon	m_B
σ	0	0	Méson escalar-isoescalar	m_s
ω	1	0	Méson vetorial-isoescalar	m_v
ρ	1	1	Méson vetorial-isovetorial	m_ρ

- méson $\sigma \rightarrow$ interação atrativa $(Q = 0,\ J = 0,\ I_3 = 0)$
- méson $\omega \rightarrow$ interação repulsiva $(Q = 0,\ J = 1,\ I_3 = 0)$
- méson $\rho \rightarrow$ assimetria de isospin $(Q = -1, 0, +1,\ J = 1,\ I_3 = 1)$

$$\omega \rightarrow \omega_\mu = (\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3)$$

$$\rho^\mu = \begin{pmatrix} \rho_1^0 & \rho_1^1 & \rho_1^2 & \rho_1^3 \\ \rho_2^0 & \rho_2^1 & \rho_2^2 & \rho_2^3 \\ \rho_3^0 & \rho_3^1 & \rho_3^2 & \rho_3^3 \end{pmatrix} \tag{2}$$

Hadrodinâmica Quântica (Walecka, 1974)

Bárions (ψ_B) interagem pela troca dos mésons:
σ (escalar), ω_μ (vetorial), $\vec{\rho}$ (isovetorial)
Lagrangeano:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \sum_B \bar{\psi}_B \Big[\gamma_\mu (i\partial^\mu - g_\omega \omega^\mu - g_\rho \vec{\tau}_B \cdot \vec{\rho}_\mu) \\
&- (m_B - g_\sigma \sigma)\Big]\psi_B + \frac{1}{2}(\partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma - m_\sigma^2 \sigma^2) \\
&- \frac{1}{3} b m_N (g_\sigma \sigma)^3 - \frac{1}{4} c (g_\sigma \sigma)^4 + \frac{1}{2} m_\omega^2 \omega_\mu \omega^\mu \\
&- \frac{1}{4}\omega_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m_\rho^2 \vec{\rho}_\mu \cdot \vec{\rho}^{\,\mu} - \frac{1}{4}\vec{\rho}_{\mu\nu}\vec{\rho}^{\,\mu\nu} \\
&+ \sum_{l=e^-,\mu^-} \bar{\psi}_l (i\gamma_\mu \partial^\mu - m_l)\psi_l
\end{aligned}$$

onde

- $\omega_{\mu\nu} = \partial_\mu \omega_\nu - \partial_\nu \omega_\mu$
- $\vec{\rho}_{\mu\nu} = \partial_\mu \vec{\rho}_\nu - \partial_\nu \vec{\rho}_\mu - g_\rho \left(\vec{\rho}_\mu \times \vec{\rho}_\nu \right)$
- a soma em B se extende sobre todo o octeto de bárions: n, p, Λ^0, Σ^-, Σ^0, Σ^+, Ξ^-, Ξ^0
- g_ρ, g_σ, e g_ω são as constantes de acoplamento bárion-méson do modelo
- os termos proporcionais a b e c representam termos de auto-interação do campo σ
- o último termo representa a contribuição dos léptons livres (e e μ)

Determinação dos parâmetros do modelo

Parâmetros: g_σ, g_ω, g_ρ, b, c

Propriedades da matéria nuclear (chumbo!) conhecidas:

- energia de ligação por nucleon: E/N
- densidade da matéria nuclear saturada: ρ_0
- compressiilidade: $K(\rho_0) = 9\rho_0^2 \left[\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \rho^2}\right]_{\rho=\rho_0}$
- energia de simetria (isospin!): $a_{sym} = \frac{g_\rho^2}{12\pi^2 m_\rho^2} k_F^3 + \frac{1}{6} \frac{k_F^2}{(k_F^2 + m_N^{*2})^{1/2}}$

$k_F \rightarrow$ momento de Fermi

Propriedades da Matéria Nuclear

Saturation Energy	E/N	-16 MeV
Saturation Density	ρ_0	0.16 fm^{-3}
Compressibility	K	265 MeV
Symmetry Energy	a_{sym}	32.5 MeV
Nucleon Effective Mass	m^*	$0.796\ m_{\mathrm{N}}$

Equações de movimento

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial q_i/\partial x^\mu)}\right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0$$

Aproximação de campo médio: os campos (operadores) são substituídos pelos valores clássicos, e as equações de Euler-Lagrange fornecem as equações de movimento:

$$m_\sigma^2 \sigma = -b m_N (g_\sigma \sigma)^2 - c(g_\sigma \sigma)^3 + g_\sigma \sum_B n_B^s$$

$$m_\omega^2 \omega_0 = g_\omega \sum_B n_B$$

$$m_\rho^2 \rho_{03} = \frac{1}{2} g_\rho \sum_B \tau_{3B} n_B$$

Equações de movimento

Bárions:

$$\left[i\gamma^\mu\partial_\mu - g_\omega\gamma^0\omega_0 - \frac{1}{2}g_\rho\tau_{3B}\gamma^0\rho_{03} - (m_B - g_\sigma\sigma_0)\right]\psi_B = 0$$

Léptons:

$$\left[i\gamma^\mu\partial_\mu - m_l\right]\psi_l = 0$$

onde (para $T = 0$)

$$n_B^s = \left\langle\psi_B^\dagger\gamma^0\psi_B\right\rangle_0 = \frac{1}{(2\pi)^3}(m_B - g_\sigma\sigma)\int_0^{k_B}\frac{d^3k}{\sqrt{k^2 + (m_B - g_\sigma\sigma)^2}}$$

é a fonte do campo escalar, e

$$n_B = \left\langle\psi_B^\dagger\psi_B\right\rangle_0 = \frac{2}{(2\pi)^3}\int_0^{k_B} d^3k$$

é a densidade bariônica (k_B é o momento de Fermi).

Pressão e densidade de energia

Tensor energia-momento:

$$T_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu}\mathcal{L} + \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial q_i/\partial x^\mu\right)} \frac{\partial q_i}{\partial x^\nu}$$

Fluido perfeito: $\langle T_{\mu\nu}\rangle = (\varepsilon + p)u_\mu u_\nu - p g_{\mu\nu}$. Com $u_\mu = (1, \vec{u})$.

No referencial de repouso ($\vec{u} = 0$) é fácil ver que:

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{3}\langle T_{ii}\rangle \\ \varepsilon &= \langle T_{00}\rangle \end{aligned}$$

Pressão e densidade de energia

Explicitamente, obtemos para os bárions, elétrons e múons

$$
\begin{aligned}
p &= -\frac{1}{2}m_\sigma^2\sigma^2 - \frac{1}{3}bm_N(g_\sigma\sigma)^3 - \frac{1}{4}c(g_\sigma\sigma)^4 + \frac{1}{2}m_\omega^2\omega_0^2 \\
&+ \frac{1}{2}m_\rho^2\rho_{03}^2 + \frac{1}{3\pi^2}\sum_B \int_0^{k_B} \frac{k^4 dk}{\sqrt{k^2 + (m_B - g_\sigma\sigma)^2}} \\
&+ \frac{1}{3\pi^2}\sum_{l=e^-,\mu^-} \int_0^{k_l} \frac{k^4}{\sqrt{k^2 + m_l^2}}
\end{aligned}
$$

e

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \frac{1}{2}m_\sigma^2\sigma^2 + \frac{1}{3}bm_N(g_\sigma\sigma)^3 + \frac{1}{4}c(g_\sigma\sigma)^4 + \frac{1}{2}m_\omega^2\omega_0^2 \\ &+ \frac{1}{2}m_\rho^2\rho_{03}^2 + \frac{1}{\pi^2}\sum_B \int_0^{k_B} k^2 dk\sqrt{k^2 + (m_B - g_\sigma\sigma)^2} \\ &+ \frac{1}{\pi^2}\sum_{l=e^-,\mu^-} \int_0^{k_l} k^2 dk\sqrt{k^2 + m_l^2}\end{aligned}$$

A minimização da energia de Gibbs fornece a condição de equilíbrio beta:

$$\mu_i = b_i\mu_n - q_i\mu_e$$

Dois potenciais químicos independentes: μ_n e μ_e. Esses potenciais são determinados pela conservação das cargas bariônica e elétrica. As equações anteriores determinam a equação de estado.

Parâmetros do Modelo de Walecka

N. K. Glendenning e S. A. Moszkowski (PRL 67, 2414, 1991)

Table: Coupling constants that yield binding $B/A = 16.3\ MeV$, density $\rho_0 = 0.153\ fm^{-3}$, and symmetry energy coefficient, $a_{sym} = 32.5\ MeV$, for saturated nuclear matter with the compression K and effective mass m^*

K		$(g_\sigma/m_\sigma)^2$	$(g_\omega/m_\omega)^2$	$(g_\rho/m_\rho)^2$		
MeV	m^*/m	(fm^2)	(fm^2)	(fm^2)	b	c
300	0.70	11.79	7.149	4.411	0.002947	-0.001070
300	0.78	9.148	4.820	4.791	0.003478	0.01328
240	0.78	9.927	4.820	4.791	0.008659	-0.002421

A dinâmica é resolvida apenas para os campos mesônicos. Os campos bariônicos, quantizados, apresentam uma solução de onda plana.
Conservação da carga bariônica:

$$n_b = \sum_i n_i$$

Conservação da carga elétrica:

$$\sum_i q_i n_i - n_e + n_\mu = 0$$

onde n_b é a densidade bariônica (bárions por unidade de volume), n_i é a densidade de bárions da espécie i,

$$n_i = \frac{2S_i + 1}{6\pi^2} k_{Fi}^3$$

q_i é a carga elétrica do bárion em unidades da carga do elétron.

Equilíbrio Beta

Energia de Gibbs - A energia livre de Gibbs (G) torna-se mínima no equilíbrio se a temperatura e a pressão forem mantidas constantes.

$$G = E - pV - TS$$

Sistema homogêneo em equilíbrio termodinâmico:
$E = TS - pV + \sum_i \mu_i N_i$

No equilíbrio, G obedece a condição: $\delta G = 0$.
Minimizando a energia livre de Gibbs:

$$\delta(G/V) = \delta \left(\sum_{l,B} \mu_i n_i \right)_{\mu_i, p, T} = 0$$

$$\begin{aligned}\delta g &= \mu_n\delta n_n + \mu_p\delta n_p + \mu_{\Lambda^0}\delta n_{\Lambda^0} + \mu_{\Sigma^-}\delta n_{\Sigma^-} + \mu_{\Sigma^0}\delta n_{\Sigma^0} + \mu_{\Sigma^+}\delta n_{\Sigma^+} \\ &+\mu_{\Delta^-}\delta n_{\Delta^-} + \mu_{\Delta^0}\delta n_{\Delta^0} + \mu_{\Delta^+}\delta n_{\Delta^+} + \mu_{\Delta^{++}}\delta n_{\Delta^{++}} + \mu_{\Xi^-}\delta n_{\Xi^-} \\ &+\mu_{\Xi^0}\delta n_{\Xi^0} + \mu_{\Omega^-}\delta n_{\Omega^-} + \mu_e\delta n_e + \mu_\mu\delta n_\mu = 0\end{aligned}$$

Conservação da carga bariônica:

$$\begin{aligned}&n_n + n_p + n_{\Lambda^0} + n_{\Sigma^-} + n_{\Sigma^0} + n_{\Sigma^+} + n_{\Delta^-} + n_{\Delta^0} + n_{\Delta^+} + n_{\Delta^{++}} \\ &+n_{\Xi^-} + n_{\Xi^0} + n_{\Omega^-} = n_B\end{aligned}$$

Conservação da carga elétrica

$$n_p + n_{\Sigma^+} - n_{\Sigma^-} + n_{\Delta^+} + 2n_{\Delta^{++}} - n_{\Delta^-} - n_{\Xi^-} - n_{\Omega^-} - n_e - n_\mu = 0$$

Variação de n_n:

$$\begin{aligned}\delta n_n &= -\delta n_p - \delta n_{\Lambda^0} - \delta n_{\Sigma^-} - \delta n_{\Sigma^0} - \delta n_{\Sigma^+} - \delta n_{\Delta^-} - \delta n_{\Delta^0} - \delta n_{\Delta^+} \\ &-\delta n_{\Delta^{++}} - \delta n_{\Xi^-} - \delta n_{\Xi^0} - \delta n_{\Omega^-}\end{aligned}$$

Variação de n_e:

$$\delta n_e = \delta n_p + \delta n_{\Sigma^+} - \delta n_{\Sigma^-} + \delta n_{\Delta^+} + \delta 2 n_{\Delta^{++}} - \delta n_{\Delta^-} - \delta n_{\Xi^-} - \delta n_{\Omega^-} - \delta n_\mu = 0$$

Arbitrando-se μ_n (carga bariônica) e μ_e (carga elétrica) potenciais químicos independentes, obtemos

$$\begin{aligned}
&(\mu_p - \mu_n + \mu_e)\,\delta n_p + (\mu_{\Lambda^0} - \mu_n)\,\delta n_{\Lambda^0} \\
&+ (\mu_{\Sigma^-} - \mu_n - \mu_e)\,\delta n_{\Sigma^-} + (\mu_{\Sigma^0} - \mu_n)\,\delta n_{\Sigma^0} + (\mu_{\Sigma^+} - \mu_n - \mu_e)\,\delta n_{\Sigma^+} \\
&+ (\mu_{\Delta^-} - \mu_n - \mu_e)\,\delta n_{\Delta^-} + (\mu_{\Delta^0} - \mu_n)\,\delta n_{\Delta^0} \\
&+ (\mu_{\Delta^+} - \mu_n + \mu_e)\,\delta n_{\Delta^+} + (\mu_{\Delta^{++}} - \mu_n + 2\mu_e)\,\delta n_{\Delta^{++}} \\
&+ (\mu_{\Xi^-} - \mu_n - \mu_e)\,\delta n_{\Xi^-} + (\mu_{\Xi^0} - \mu_n)\,\delta n_{\Xi^0} \\
&+ (\mu_{\Omega^-} - \mu_n - \mu_e)\,\delta n_{\Omega^-} + (\mu_\mu - \mu_e)\,\delta n_\mu = 0
\end{aligned}$$

Equações de balanço químico:

$$
\begin{aligned}
\mu_p &= \mu_n - \mu_e, \qquad \mu_\mu = \mu_e \\
\mu_\Lambda &= \mu_n \\
\mu_{\Sigma^-} &= \mu_n + \mu_e \\
\mu_{\Sigma^0} &= \mu_n \\
\mu_{\Sigma^+} &= \mu_n - \mu_e \\
\mu_{\Delta^-} &= \mu_n + \mu_e \\
\mu_{\Delta^0} &= \mu_n \\
\mu_{\Delta^+} &= \mu_n - \mu_e \\
\mu_{\Delta^{++}} &= \mu_n - 2\mu_e \\
\mu_{\Xi^-} &= \mu_n + \mu_e \\
\mu_{\Xi^0} &= \mu_n \\
\mu_{\Omega^-} &= \mu_n + \mu_e
\end{aligned}
$$

Equilíbrio Beta

$$\mu_p = \mu_n - \mu_e, \qquad \mu_\mu = \mu_e$$

$$p + e^- \leftrightarrow n + \nu_e$$

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$$

Quando $\mu_e > m_\mu = 105\, MeV$

$$e^- \leftrightarrow \mu^- + \nu_e + \bar{\nu}_\mu$$

Os neutrinos escapam do sistema!

Equilíbrio Beta

Equação de balanço químico:

$$\mu_i = b_i \mu_n - q_i \mu_e$$

Por definição, o potencial químico é dado por

$$\mu_i = g_\omega \omega_0 + \frac{1}{2} g_\rho I_{3i} \rho_{03} + \sqrt{k_{F_i}^2 + m_i^{*2}}$$

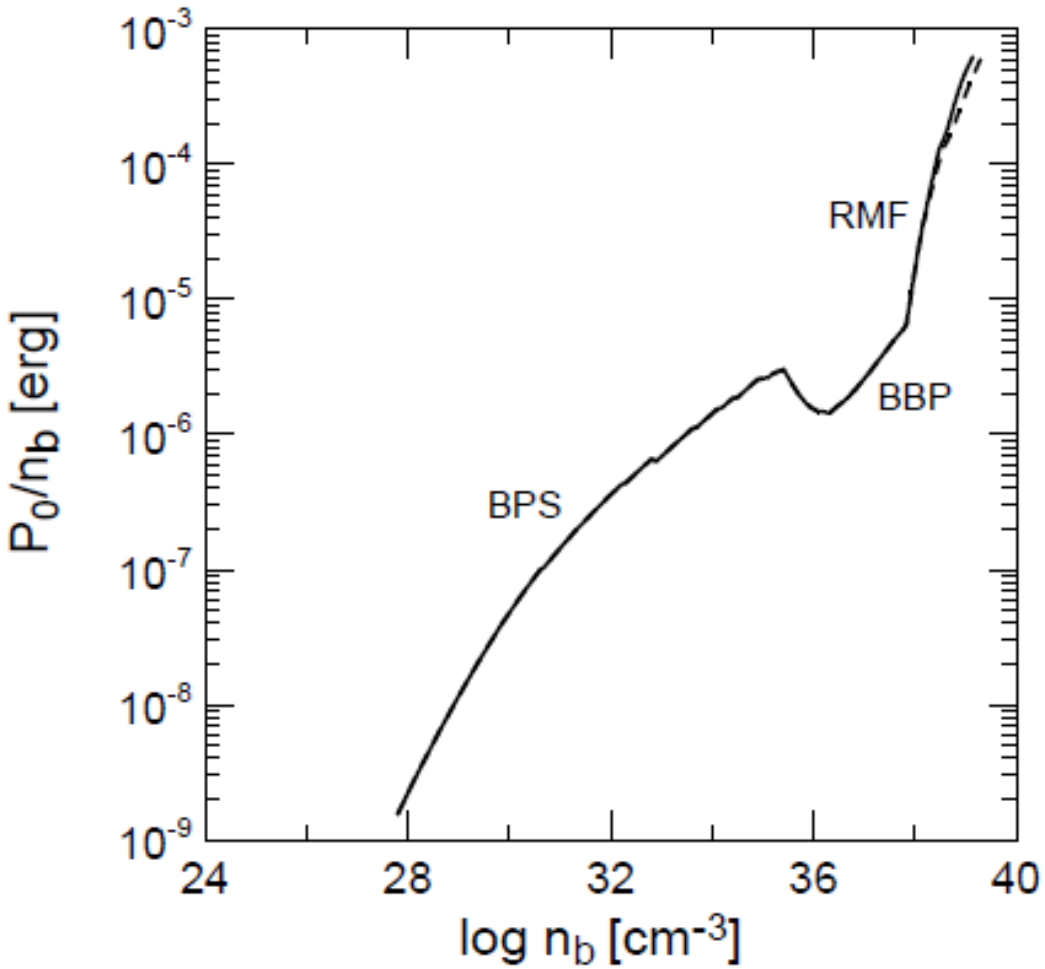
onde $\sqrt{k_{F_i}^2 + m_i^{*2}}$ é a energia de Fermi do bárion.
A masssa efetiva é dada por

$$m_i^* = m_i - g_\sigma \sigma$$

Regime subnuclear

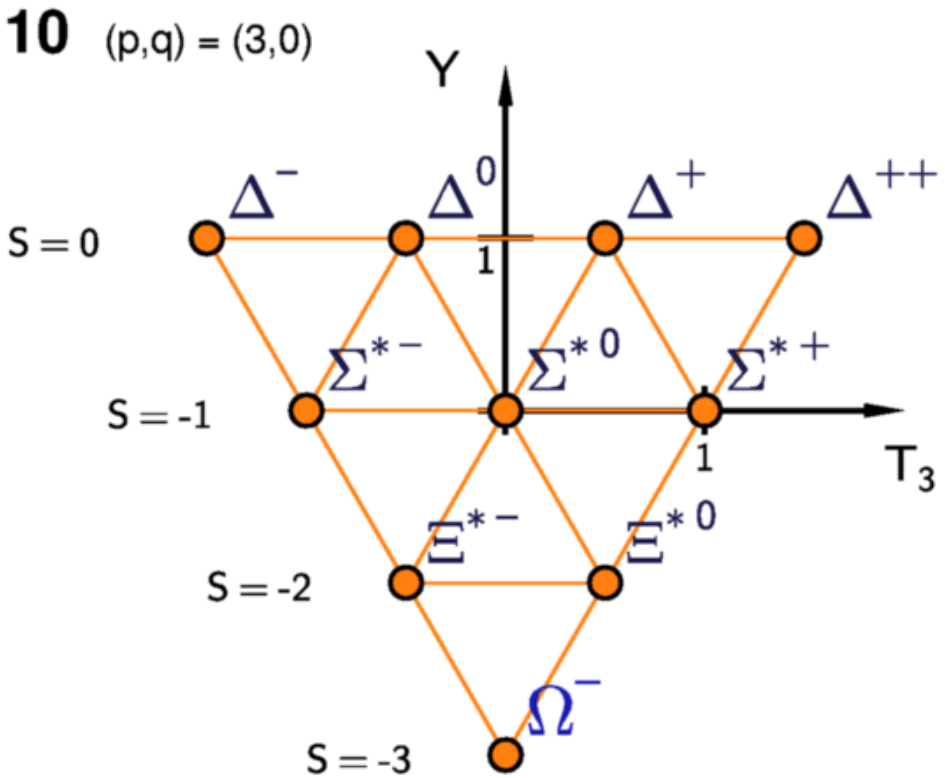
$1.044 \times 10^4 \rho < 4,3 \times 10^{11}$ g $\cdot$ cm^{-3} - rede de núcleos atômicos e um gás de elétrons relativístico. EoS BPS (Baym, Pethick and Sutherland, 1971)
Neutron drip - Para $\rho \geq \times 10^{11}$ g $\cdot$ cm^{-3} os núcleos começam a "gotejar" nêutrons. Forma-se a partir daí um gás de nêutrons livres.

$\rho > 4.3 \times 10^{11}$ g $\cdot$ cm$^{-3} < \rho_0$ - rede de núcleos atômicos, gás de nêutrons livres e gás de elétrons relativístico. EoS BBP (Baym, Bethe and Pethick, 1971)
A figura a seguir mostra a equação de estado para os três regimes de densidades: subnuclear sem nêutrons livres, subnuclear com nêutrons livres e supranuclear (RMFT).


10^{-3}
10^{-4}
10^{-5}
10^{-6}
10^{-7}
10^{-8}
10^{-9}
P_0/n_b [erg]
RMF
BBP
BPS
24
28
32
36
40
log n_b [cm^{-3}]

Decupleto Bariônico

$$Q = I_3 + \frac{1}{2}(B + S)$$



Ressonância Δ e Ω^0

As ressonâncias Δ ($M_\Delta = 1232\,MeV$) e a partícula Ω^- ($M = 1382\,MeV$) são bárions de spin 3/2. São descritos pela equação de Rarita-Schwinger. **Lagrangeano**:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \sum_{i=B,\varsigma} \bar{\psi}_i \left[\gamma_\mu (i\partial^\mu - g_{\omega i}\omega^\mu - g_{\rho i}\vec{\tau}_i \cdot \vec{\rho}_\mu)\right. \\
&- \left.(m_i - g_{\sigma i}\sigma)\right]\psi_i + \frac{1}{2}(\partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma - m_\sigma^2 \sigma^2) \\
&- \frac{1}{3} b m_N (g_{\sigma B}\sigma)^3 - \frac{1}{4} c (g_{\sigma B}\sigma)^4 + \frac{1}{2} m_\omega^2 \omega_\mu \omega^\mu \\
&- \frac{1}{4}\omega_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m_\rho^2 \vec{\rho}_\mu \cdot \vec{\rho}^\mu - \frac{1}{4}\vec{\rho}_{\mu\nu}\vec{\rho}^{\mu\nu} \\
&+ \sum_{l=e^-,\mu^-} \bar{\psi}_l (i\gamma_\mu \partial^\mu - m_l)\psi_l
\end{aligned}$$

onde $B = n,\ p,\ \Lambda^0,\ \Sigma^-,\ \Sigma^0,\ \Sigma^+,\ \Xi^-,\ \Xi^0$, e $\varsigma = \Delta^-,\ \Delta^0,\ \Delta^+,\ \Delta^{++},\ \Omega^-$.

Não existem medidas experimentais para os valores das constantes de acoplamento Δ-meson. Definindo os parâmetros

- $\alpha = g_{\omega\Delta}/g_{\omega B}$
- $\beta = g_{\sigma\Delta}/g_{\sigma B}$
- $\gamma = g_{\rho\Delta}/g_{\rho B}$

Kosov et al determinaram teoricamente uma janela para os valores de duas dessas constantes (D. S. Kosov, C. Fuchs, B. V. Martemyanov and A. Faessler, Phuys. Lett. B421, 37, 1998).

Modern Physics Letters A, Vol. 15, No. 24 (2000) 1529–1537
© World Scientific Publishing Company

DELTA MATTER FORMATION IN DENSE ASYMMETRIC NUCLEAR MEDIUM

J. C. T. DE OLIVEIRA
Departamento de Física, Universidade Federal de Roraima, Campus do Paricarana s/n, 69310-270, Boa Vista, Roraima, Brazil

M. KYOTOKU
Departamento de Física, Universidade Federal da Paraíba, C. Postal 5008, CEP 58059-970, João Pessoa, Paraíba, Brazil

M. CHIAPPARINI
Instituto de Física, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, R. São Francisco Xavier 524, 20559-900, Rio de Janeiro, Brazil

H. RODRIGUES
Centro Federal de Educação Tecnológica, Av. Maracanã, 249, 20550-011, Rio de Janeiro, Brazil

S. B. DUARTE*
Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, MCT, Dr. Xavier Sigaud, 150, 22290-180, Rio de Janeiro, Brazil

Received 16 August 2000

D. S. Kosov, C. Fuchs, B. V. Martemyanov and A. Faessler, Phuys. Lett. B421, 37 (1998)

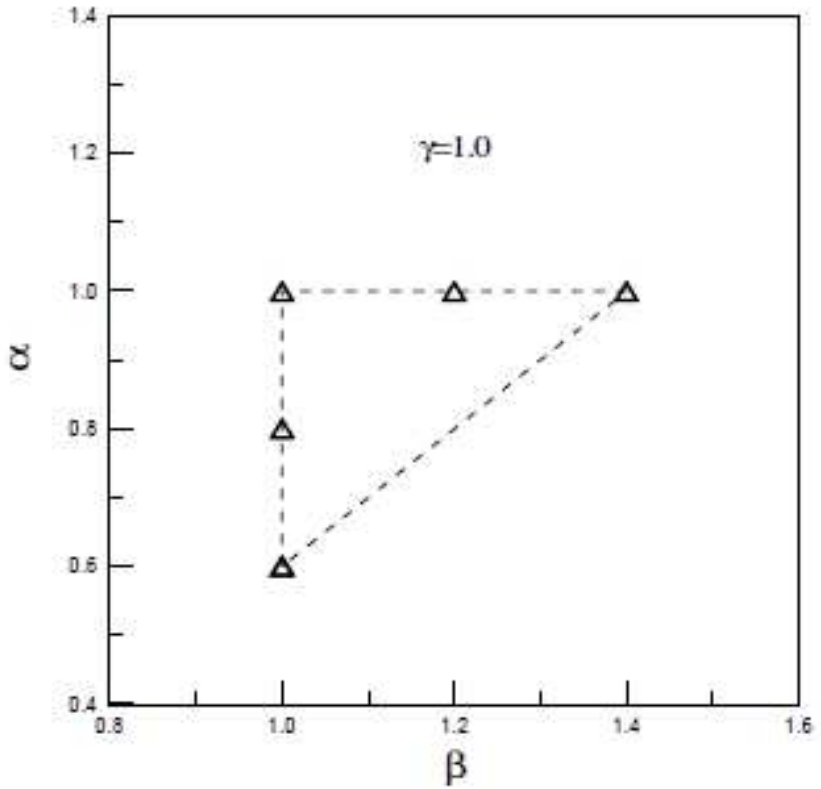
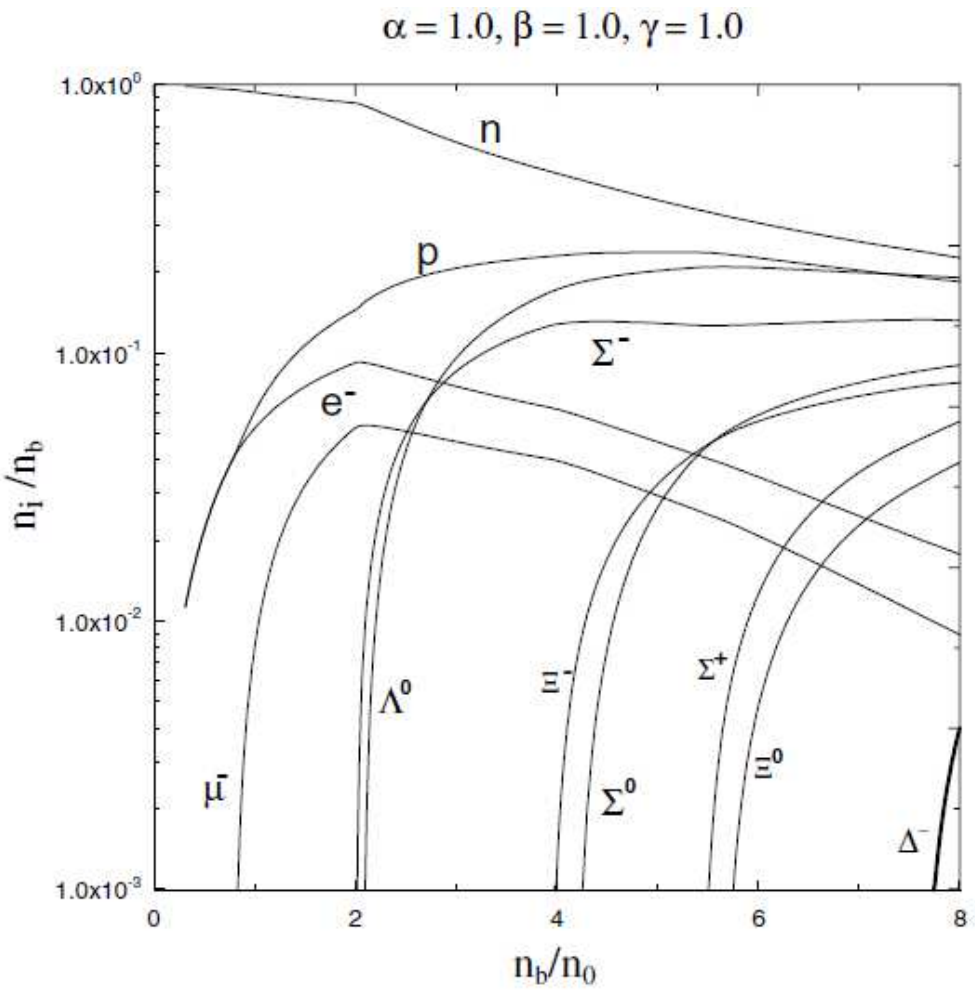
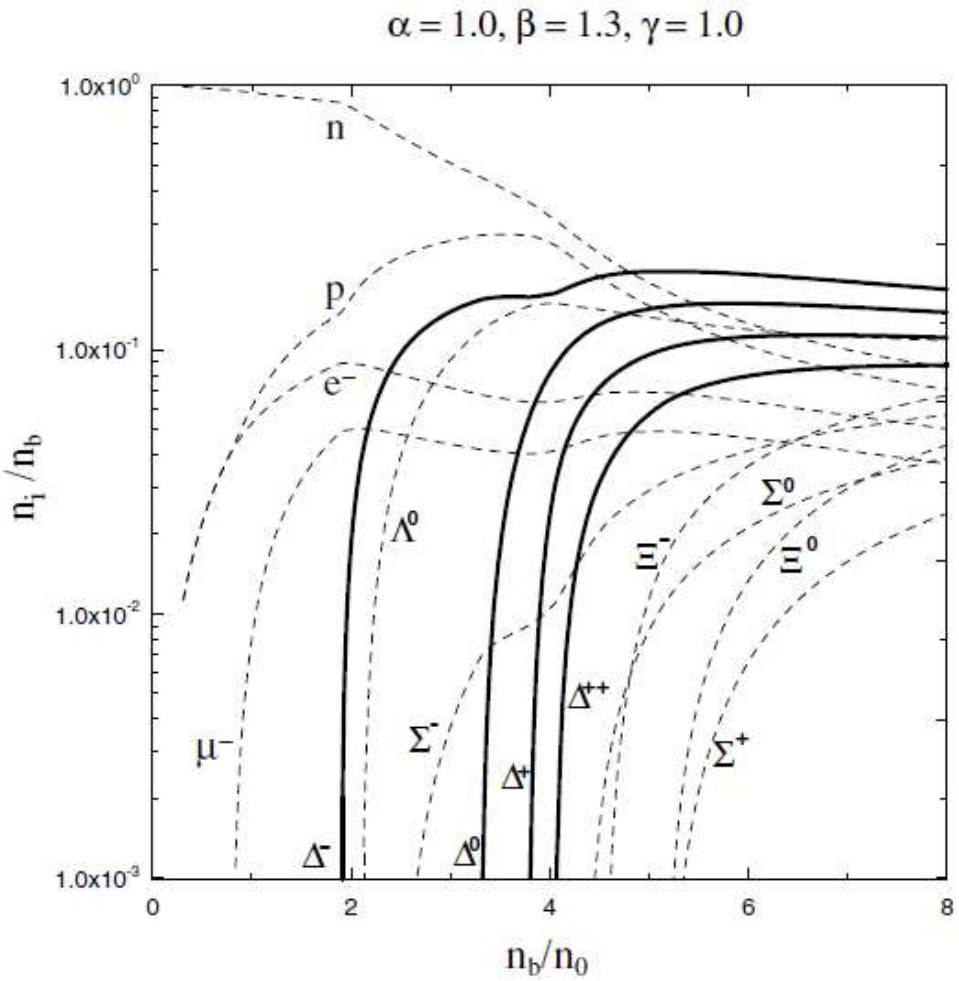
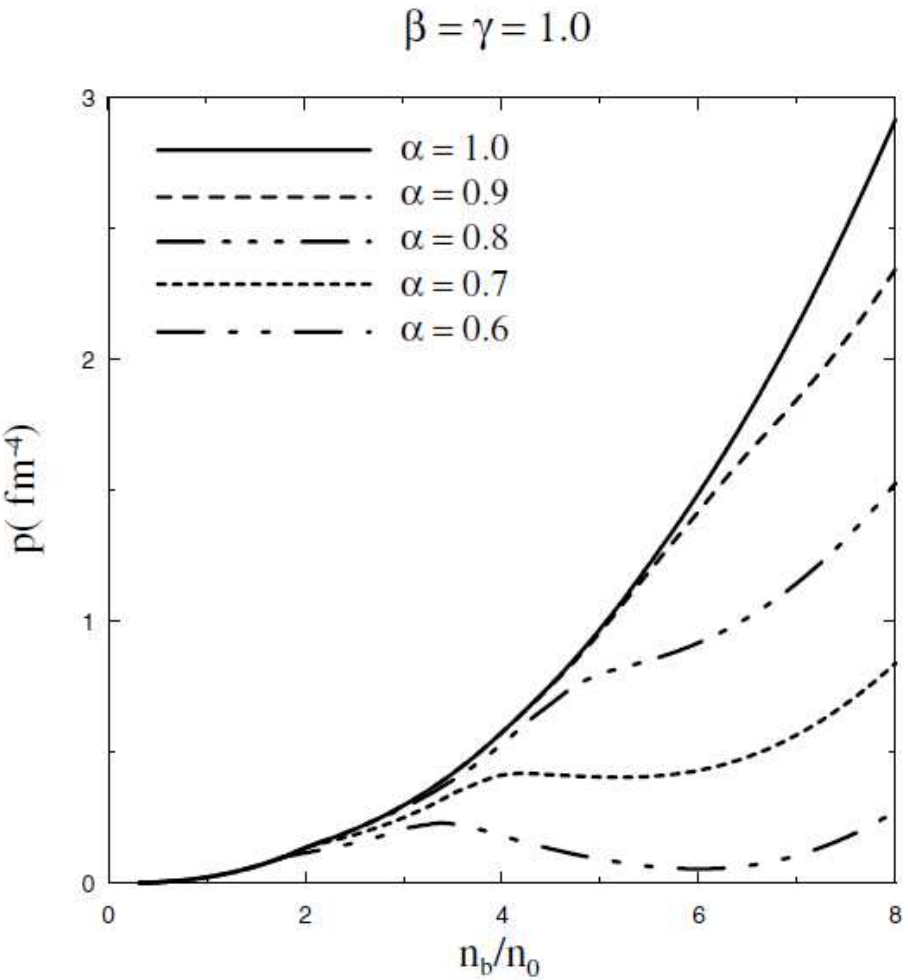
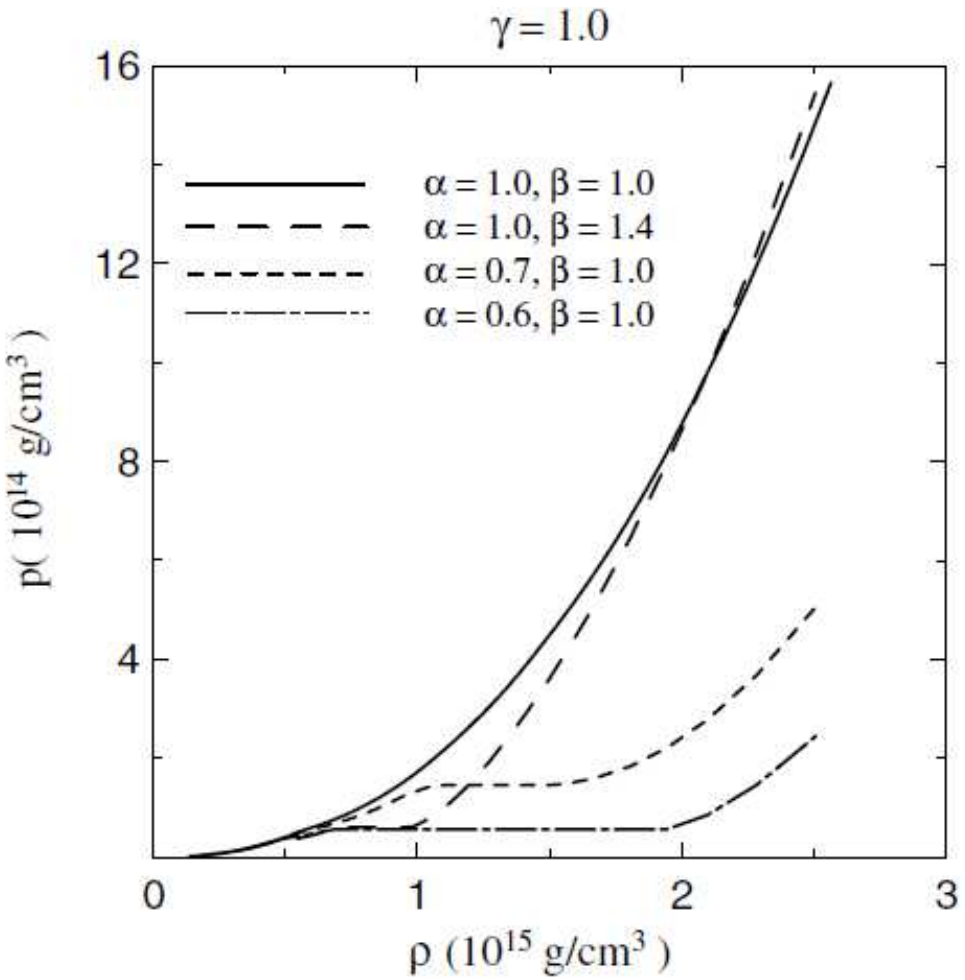


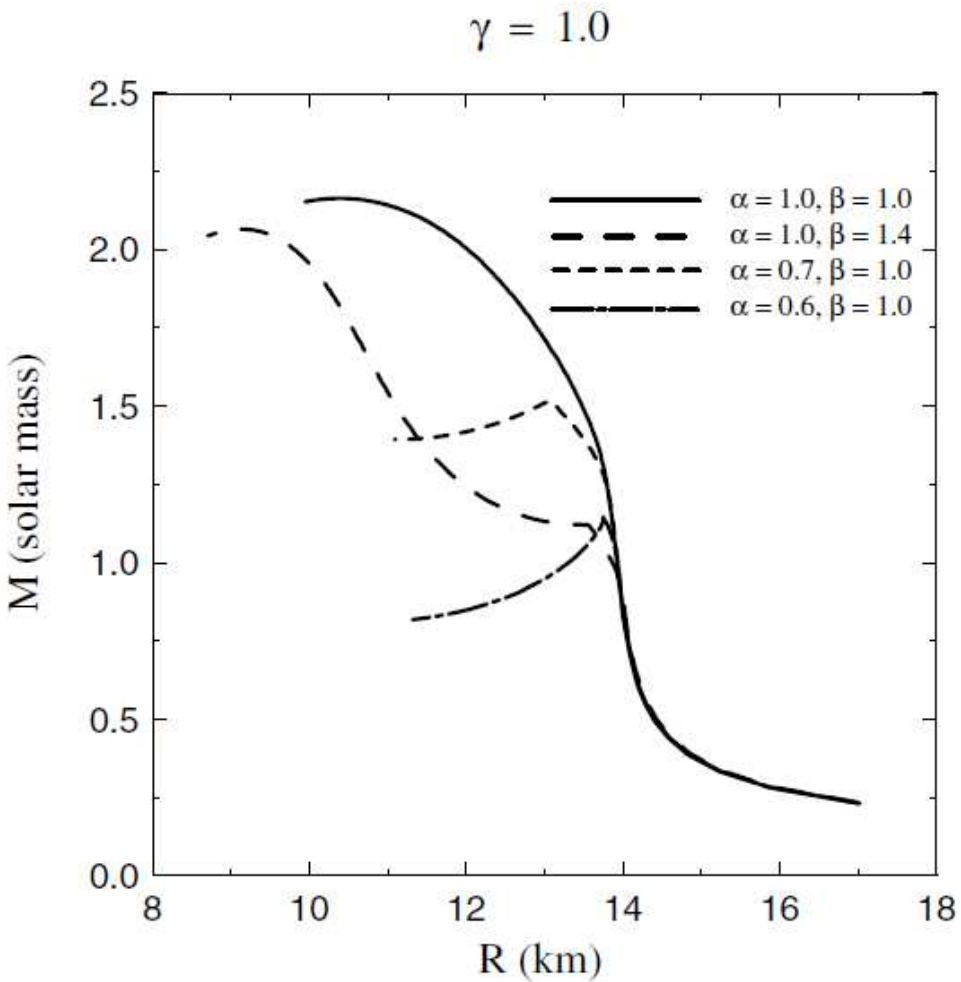
Fig. 5. Diagram of values for the delta-meson coupling constants showing in triangles the values used in the present work.

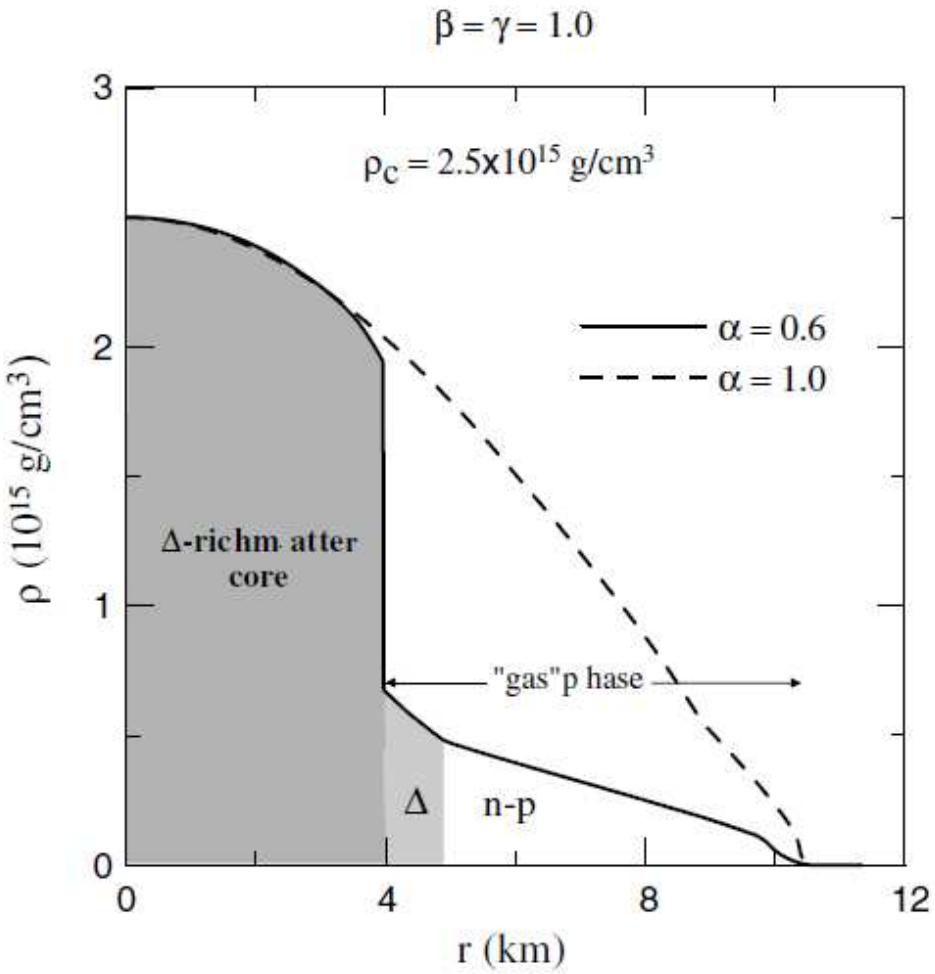

α = 1.0, β = 1.0, γ = 1.0
1.0x10^0
1.0x10^-1
1.0x10^-2
1.0x10^-3
n_i /n_b
n
p
e^-
μ^-
Σ^-
Λ^0
Ξ^-
Σ^0
Σ^+
Ξ^0
Δ^-
0
2
4
6
8
n_b/n_0


α = 1.0, β = 1.3, γ = 1.0
1.0x10^0
1.0x10^-1
1.0x10^-2
1.0x10^-3
n_i /n_b
n
p
e⁻
μ⁻
Λ⁰
Σ⁻
Δ⁻
Δ⁰
Δ⁺
Δ⁺⁺
Ξ⁻
Σ⁰
Ξ⁰
Σ⁺
0
2
4
6
8
n_b/n_0

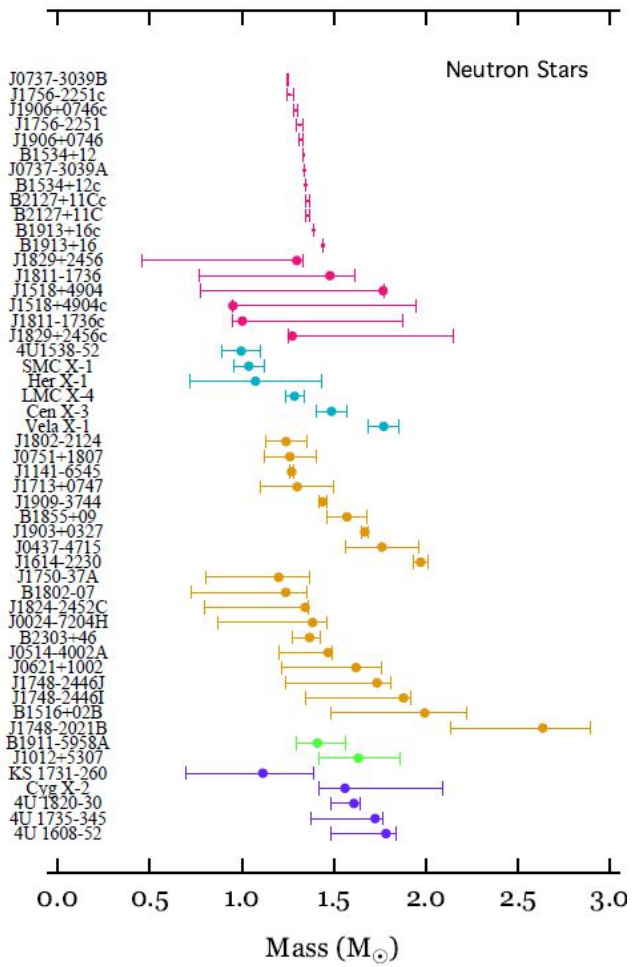

β = γ = 1.0
α = 1.0
α = 0.9
α = 0.8
α = 0.7
α = 0.6
p(fm⁻⁴)
n_b/n_0
0
1
2
3
0
2
4
6
8


γ = 1.0
α = 1.0, β = 1.0
α = 1.0, β = 1.4
α = 0.7, β = 1.0
α = 0.6, β = 1.0
p(10^14 g/cm^3)
ρ (10^15 g/cm^3)
0
1
2
3
4
8
12
16

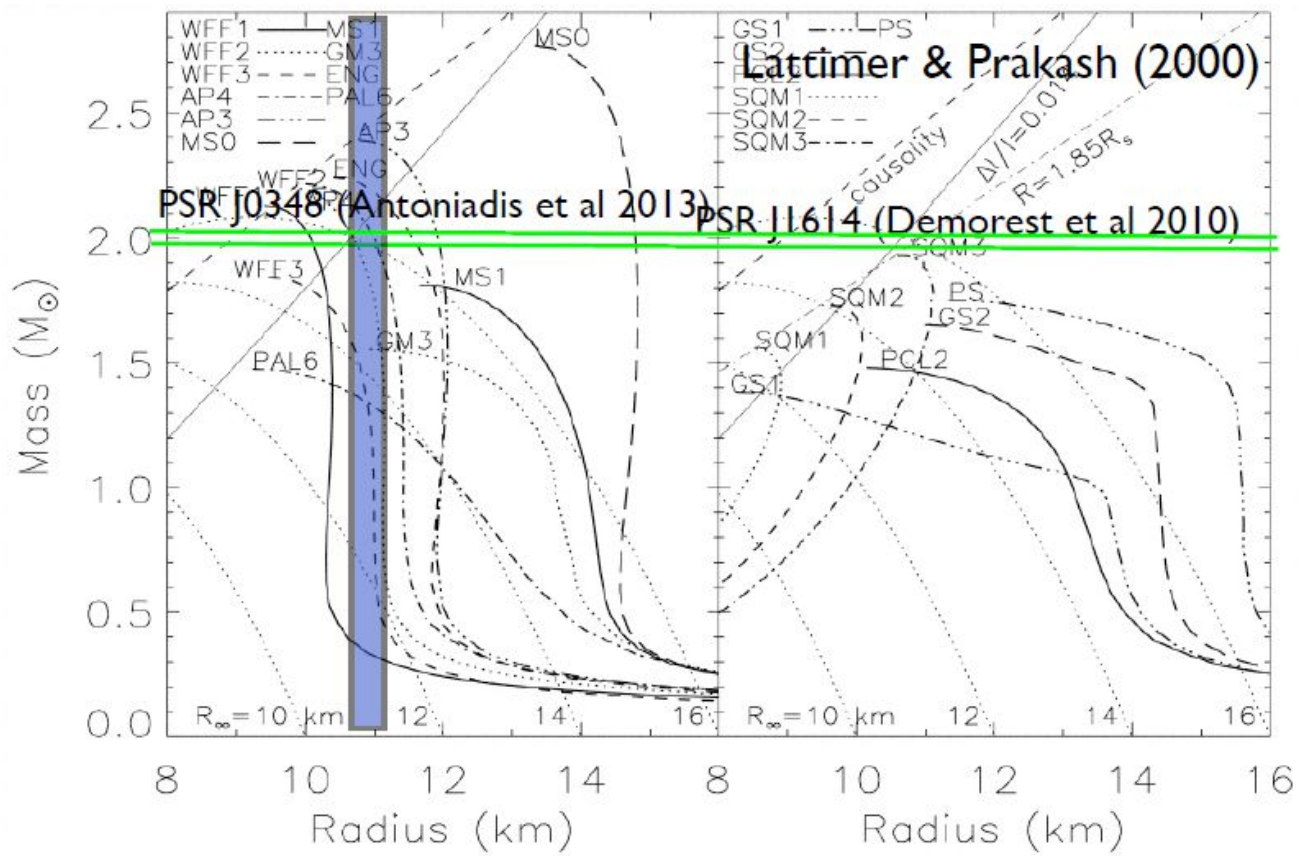

γ = 1.0
M (solar mass)
R (km)
α = 1.0, β = 1.0
α = 1.0, β = 1.4
α = 0.7, β = 1.0
α = 0.6, β = 1.0
2.5
2.0
1.5
1.0
0.5
0.0
8
10
12
14
16
18


β = γ = 1.0
ρc = 2.5x10^15 g/cm^3
α = 0.6
α = 1.0
Δ-richm atter core
"gas"p hase
Δ
n-p
ρ (10^15 g/cm^3)
r (km)
0
1
2
3
0
4
8
12

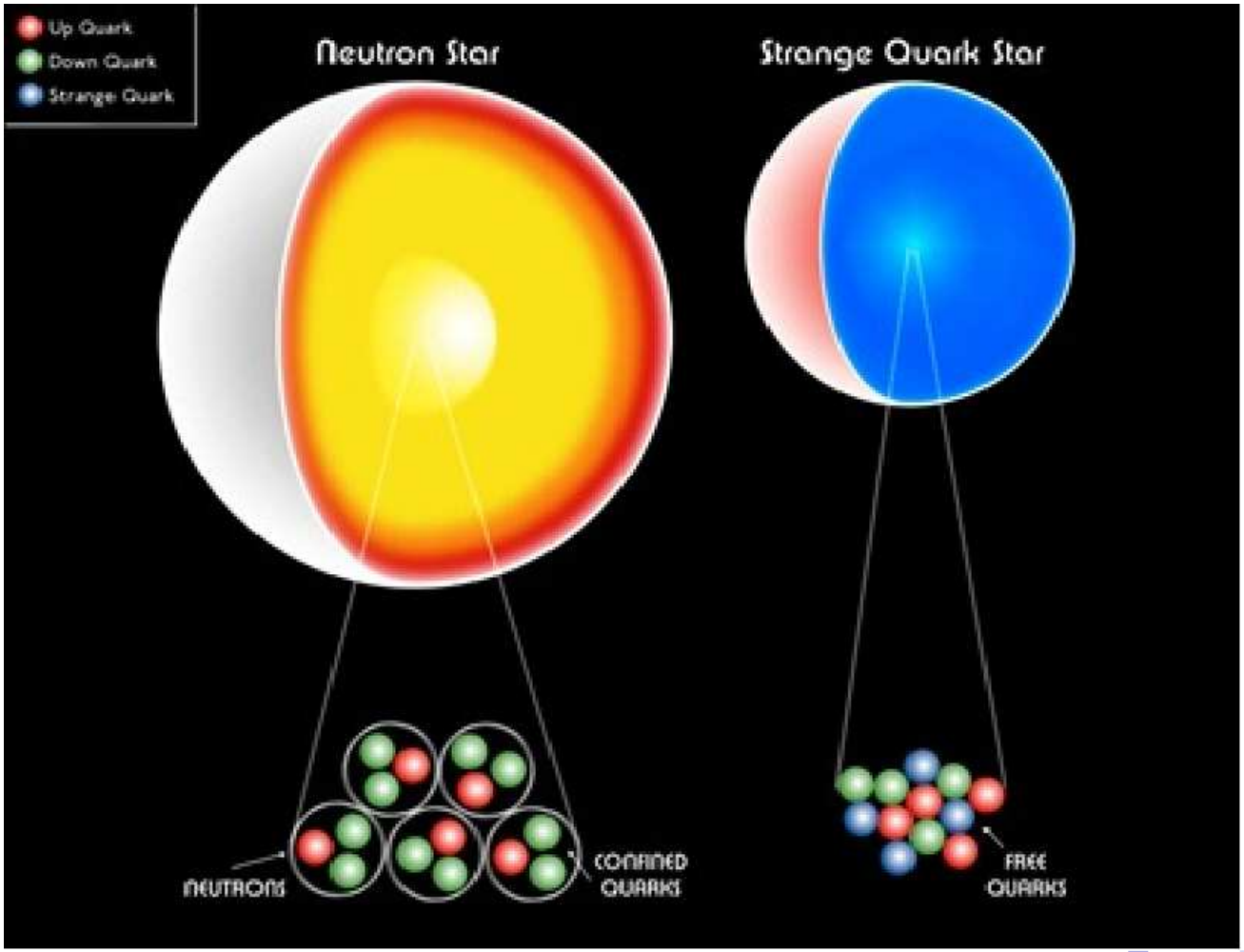
Distribuição de Massa



Medidas Recentes



Matéria de Quark



Matéria Estranha

A hipótese da existência da matéria estranha, isto é, a matéria bariônica formada por quarks u, d e s foi formulada por Witten (1984) e Farhi e Jaffe (1984). Propriedades da matéria estranha:

- verdadeiro estado fundamental da matéria
- igual número de quarks u, d e s
- matéria estranha é eletricamente neutra ($Q = 0$)

Existe matéria estranha no interior das estrelas de nêutron?

Quark / Antiquark	Symbol		Charge/*e*		Baryon number, B		Strangeness, S	
up	u	$\bar{u}$	+2/3	-2/3	1/3	-1/3	0	0
down	d	$\bar{d}$	-1/3	+1/3	1/3	-1/3	0	0
charm	c	$\bar{c}$	+2/3	-2/3	1/3	-1/3	0	0
strange	s	$\bar{s}$	-1/3	+1/3	1/3	-1/3	-1	1
top	t	$\bar{t}$	+2/3	-2/3	1/3	-1/3	0	0
bottom	b	$\bar{b}$	-1/3	+1/3	1/3	-1/3	0	0

Modelo da Sacola do MIT

Quarks livres (sem massa) e relativísticos estão confinados dentro da sacola (nucleon). A energia interna é dada por

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + B$$

onde ε_0 é a densidade de energia cinética dos quarks, e B é o termo confinante ou energia do vácuo. Os quarks dentro da sacola formam um gás relativístico. Então

$$\varepsilon_0 = b n_b^{4/3}$$

Pressão dos quarks:

$$p = n_b^2 \frac{d\varepsilon}{dn_b^2} = \frac{1}{3} b n_b^{4/3} - B$$

Relação entre p e ε na sacola: $p = \frac{1}{3}(\varepsilon - 4B)$
Unidade da constante de bag B: $MeV.fm^{-3}$.

Modelo da Sacola do MIT

Sistema de quarks u, d e s ($T = 0$) confinados na sacola

$$
\begin{aligned}
p &= \sum_{f=u,d,s} \frac{3}{\pi^2} \int_0^{k_f} k^2 \left(\sqrt{(k^2 + m_f^2)} - \mu_q \right) dk - \frac{\mu^4}{108\pi^2}(1 - a_4) - B \\
n_B &= \frac{1}{3\pi^2} \sum_{f=u,d,s} \left(k_u^3 + k_d^3 + k_s^3 \right) \\
\varepsilon &= -p + \sum_{f=u,d,s} \mu_f n_f
\end{aligned}
$$

μ_f - potencial químico do quark
B - constante da sacola (energia do vácuo da QCD)
a_4 - interação entre os quarks ($0 \leq a_4 \leq 1$)

Modelo de quarks com massa dependente da densidade

A masssa dos quarks u, d e s dependem do inverso da densidade bariônica (S. Chakrabarty, 1991, Phys. Rev. D, 43, 627):

$$m_u = m_d = \frac{C}{3n_b}, \qquad m_s = m_{s0} + \frac{C}{3n_b}$$

A constante C representa a densidade de energia no limite de densidade zero (equivalente ao vácuo da QCD no modelo de sacola do MIT)

$$n_b = \frac{n_u + n_d + n_s}{3}$$

Motivação:

- interação entre quarks
- liberdade assintótica da QCD
- confinamento

Modelo Nambu e Jona-Lasinio SU(3)

Na aproximação de campo médio a Lagrangeana NJL é dada por (P. Rehberg, S. P. Klevansky, and J. Hufner, Phys. Rev. C53, 410 - 1996)

$$\mathcal{L}_{MFA} = \sum_f \bar{\Psi}_f \left(i\partial\!\!\!/ + i\gamma_0 G_V \rho_{Vf} - m_{0f} \right) \Psi_f - G_S \sum_f \rho_{Sf}^2 + G_V \sum_f \rho_{Vf}^2 + 4K \prod_f \rho_{Sf} \qquad (\hbar = c = 1)$$

$$\rho_{Sf} = \langle \bar{\Psi}_f \Psi_f \rangle \quad (\text{densidade escalar})$$

$$\rho_{Vf} = \langle \bar{\Psi}_f \gamma_0 \Psi_f \rangle \quad (\text{densidade vetorial})$$

Modelo Nambu e Jona-Lasinio SU(3)

As massas constituintes dos quarks são obtidas pelas equações de Gap acopladas:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{MFA}}{\partial \bar{\Psi}_f} = 0$$

$$m_{Vf} = m_{0f} - G_S \rho_{Sf} + 2K \prod_{f' \neq f} \rho_{Sf'}$$

$$\rho_{Sf} = 2N_c \int_0^\infty \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{m_f}{\sqrt{p^2 + m_f^2}} (n_f + \bar{n}_f)$$

$$\rho_{Vf} = 2N_c \int_0^\infty \frac{d^3p}{(2\pi)^3} (n_f - \bar{n}_f)$$

Modelo Nambu e Jona-Lasinio SU(3)

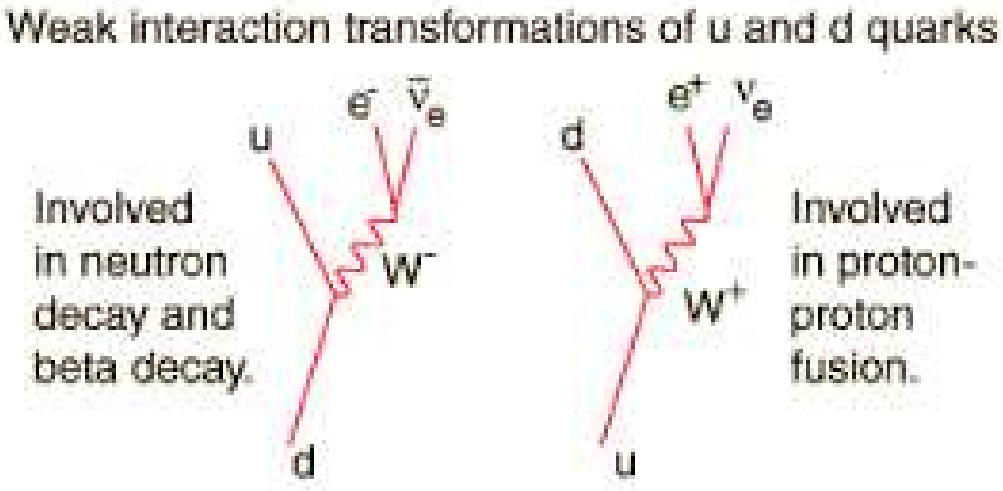
A integral no cálculo de ρ_{Sf} pode ser regularizada introduzindo o cut-off Λ:

$$\rho_{Sf} = \int_0^{\Lambda} \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{m_f}{\sqrt{p^2 + m_f^2}} (n_f + \bar{n}_f)$$

A densidade vetorial é obtida a partir da densidade bariônica ρ_b:
$\rho_b = (1/3) \sum_f \rho_{Vf}$
m_{0f}, G_S, K e λ são ajustados pelos valores observados das massas dos mésons π, K e η, e pela constante de decaimento f_π. G_V é determinado em função de G_S: $0 < G_V/G_S \leq 1$.

Decaimentos de u e d

$$
\begin{aligned}
u &\rightarrow d + e^{+} + \nu_e \qquad \mu_u = \mu_d - \mu_e \\
d &\rightarrow u + e^{-} + \bar{\nu}_e \\
u + d &\rightarrow u + s \qquad \mu_d = \mu_s \ \ (\mu_d > m_s)
\end{aligned}
$$



Construindo a Transição de fase

Condições de Gibbs:

$$\begin{aligned} P_H\left(\mu_b^H, \mu_e^H, \phi\right) &= P_Q\left(\mu_b^Q, \mu_e^Q, \phi\right) \\ T_H &= TQ \\ \mu_b^H &= \mu_b^Q \\ \mu_e^H &= \mu_e^Q \end{aligned}$$

- **nêutrons**: $\mu_n = 3\mu_b^H$
- **quarks**: $\mu_b^q = \frac{\mu_u + \mu_d + \mu_s}{3}$

Construindo a Transição de fase

Fração do volume relativo ocupado pela matéria de quarks:
$\chi = V_Q/V$ $(0 \leq \chi \leq)$
Conservação da carga bariônica:

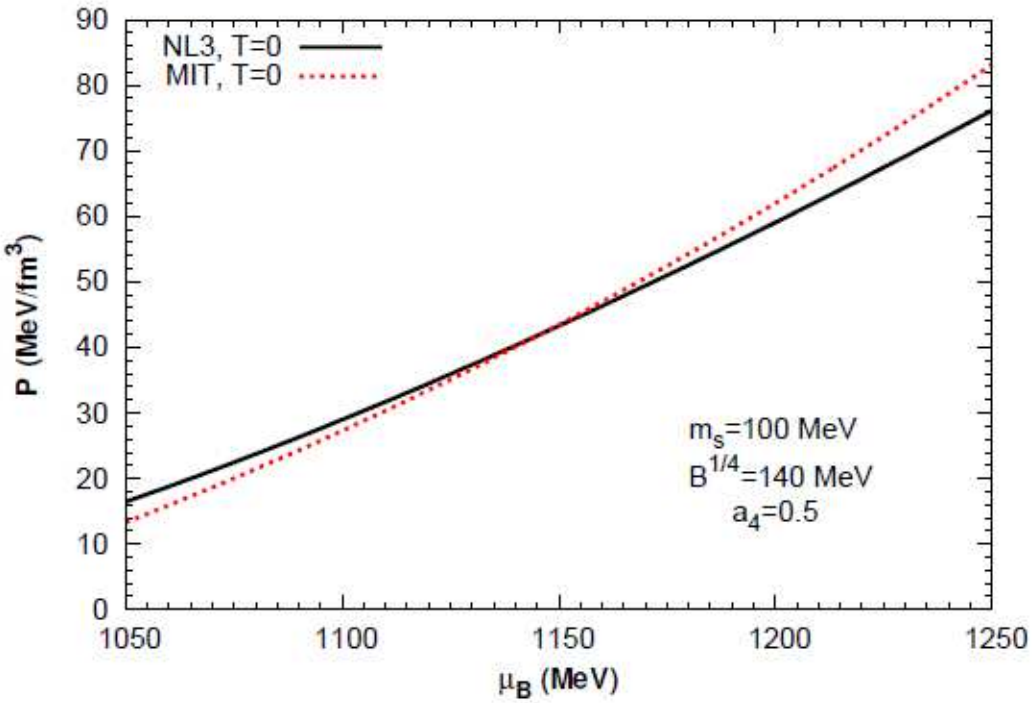
$$n_b = (1-\chi)n_b^H + \chi n_b^Q$$

Conservação da carga elétrica:

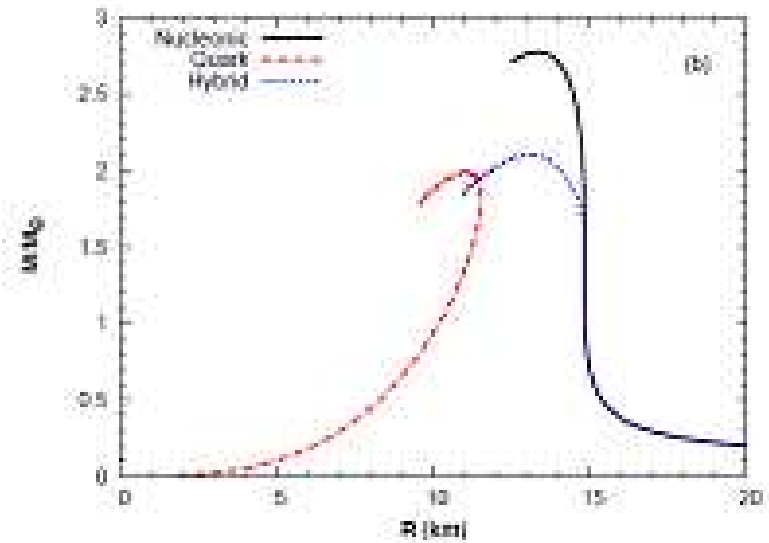
$$(1-\chi)\sum_{i=B,l} q_i^H n_i^H + \chi \sum_{i=q,l} q_i^Q n_i^Q = 0$$

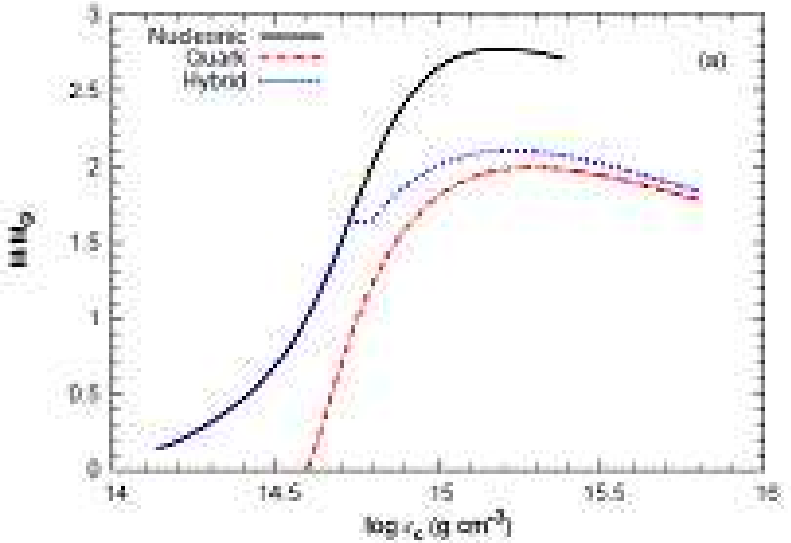
Densidade de energia:

$$\varepsilon_b = (1-\chi)\varepsilon^H + \chi\varepsilon^Q$$


NL3, T=0
MIT, T=0
m_s=100 MeV
$B^{1/4}$=140 MeV
a_4=0.5
P (MeV/fm^3)
μ_B (MeV)
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
1050
1100
1150
1200
1250

Diagramas massa×raio e massa×densidade





PHYSICAL REVIEW C 89, 015806 (2014)

Quark deconfinement in high-mass neutron stars

M. Orsaria*
Department of Physics, San Diego State University, 5500 Campanile Drive, San Diego, California 92182, USA; CONICET, Rivadavia 1917, 1033 Buenos Aires, Argentina; and Gravitation, Astrophysics and Cosmology Group, Facultad de Ciencias Astronómicas y Geofísicas, UNLP, Paseo del Bosque S/N (1900), La Plata, Argentina

H. Rodrigues†
Centro Federal de Educação Tecnológica do Rio de Janeiro, Av Maracanã 249, 20271-110, Rio de Janeiro, RJ, Brazil

F. Weber‡
Department of Physics, San Diego State University, 5500 Campanile Drive, San Diego, California 92182, USA and Center for Astrophysics and Space Sciences, University of California, San Diego, La Jolla, California 92093, USA

G. A. Contrera§
CONICET, Rivadavia 1917, 1033 Buenos Aires, Argentina; IFLP, CONICET - Dpto. de Física, UNLP, La Plata, Argentina; and Gravitation, Astrophysics and Cosmology Group, Facultad de Ciencias Astronómicas y Geofísicas, UNLP, Paseo del Bosque S/N (1900), La Plata, Argentina

(Received 6 August 2013; revised manuscript received 1 December 2013; published 29 January 2014)

In this paper, we explore whether or not quark deconfinement may occur in high-mass neutron stars such as J1614 − 2230 ($1.97 \pm 0.04\ M_\odot$) and J0348 + 0432 ($2.01 \pm 0.04\ M_\odot$). Our study is based on a nonlocal extension of the SU(3) Nambu–Jona-Lasinio (n3NJL) model with repulsive vector interactions among the quarks. This model goes beyond the frequently used local version of the Nambu–Jona-Lasinio (NJL) model by accounting for several key features of QCD which are not part of the local model. Confined hadronic matter is treated in the framework of nonlinear relativistic mean field theory. We find that both the local as well as the nonlocal NJL model predict the existence of extended regions of mixed quark-hadron (quark-hybrid) matter in high-mass neutron stars with masses of 2.1 to 2.4 $M_\odot$. Pure quark matter in the cores of neutron stars is obtained for certain parametrizations of the hadronic lagrangian and choices of the vector repulsion among quarks. The radii of high-mass neutron stars with quark-hybrid matter and/or pure quark matter cores in their centers are found to lie in the canonical range of 12 to 13 km.

DOI: 10.1103/PhysRevC.89.015806 PACS number(s): 97.60.Jd, 21.65.Qr, 25.75.Nq, 26.60.Kp

TABLE III. Parameters of the hadronic lagrangian of Eq. (19).

Coupling constants	Parametrizations	
	GM1	NL3
g_σ	8.910	10.217
g_ω	10.610	12.868
g_ρ	8.196	8.948
b_σ	0.002947	0.002055
c_σ	−0.001070	−0.002651

TABLE II. Parameters used for the nonlocal NJL (n3NJL) model calculations presented in this paper.

Parameters	n3NJL
$\bar{m}$	6.2 MeV
m_s	140.7 MeV
Λ	706.0 MeV
$G_S\Lambda^2$	15.04
$H\Lambda^5$	−337.71

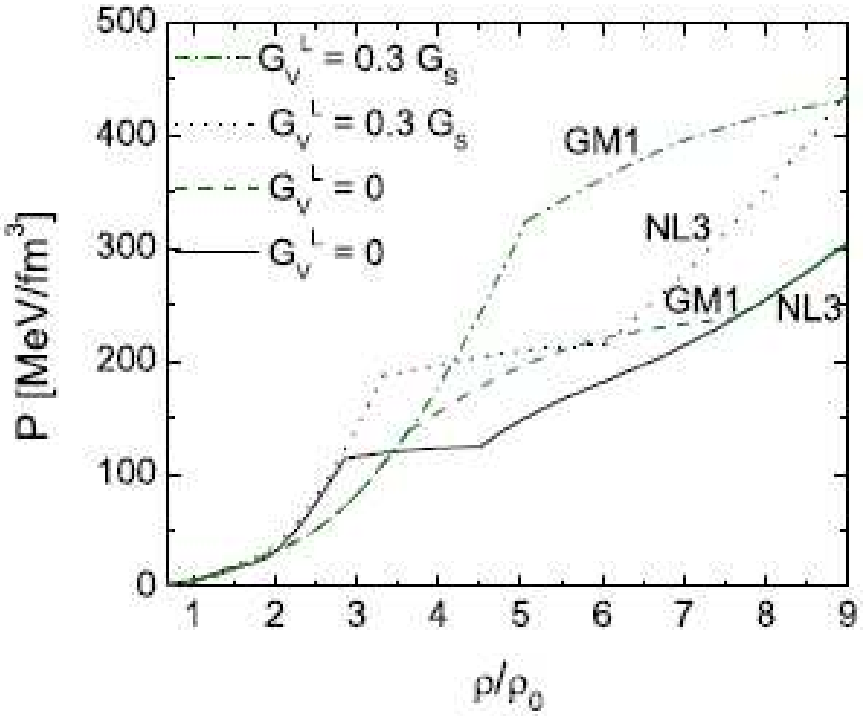


FIG. 2. (Color online) Pressure as a function of baryon number density for the local NJL model, l3NJL. The hadronic parametrizations are GM1 and NL3, and the vector repulsion strengths are $G_V^L/G_S = 0$ and $G_V^L/G_S = 0.3$.

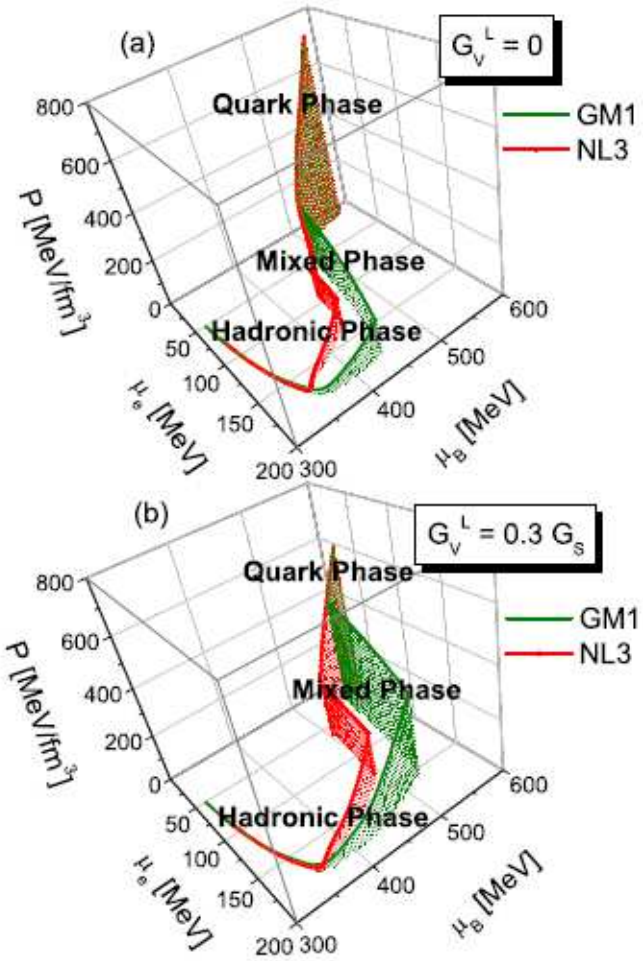


FIG. 4. (Color online) Pressure as a function of baryon ($\mu_B =$

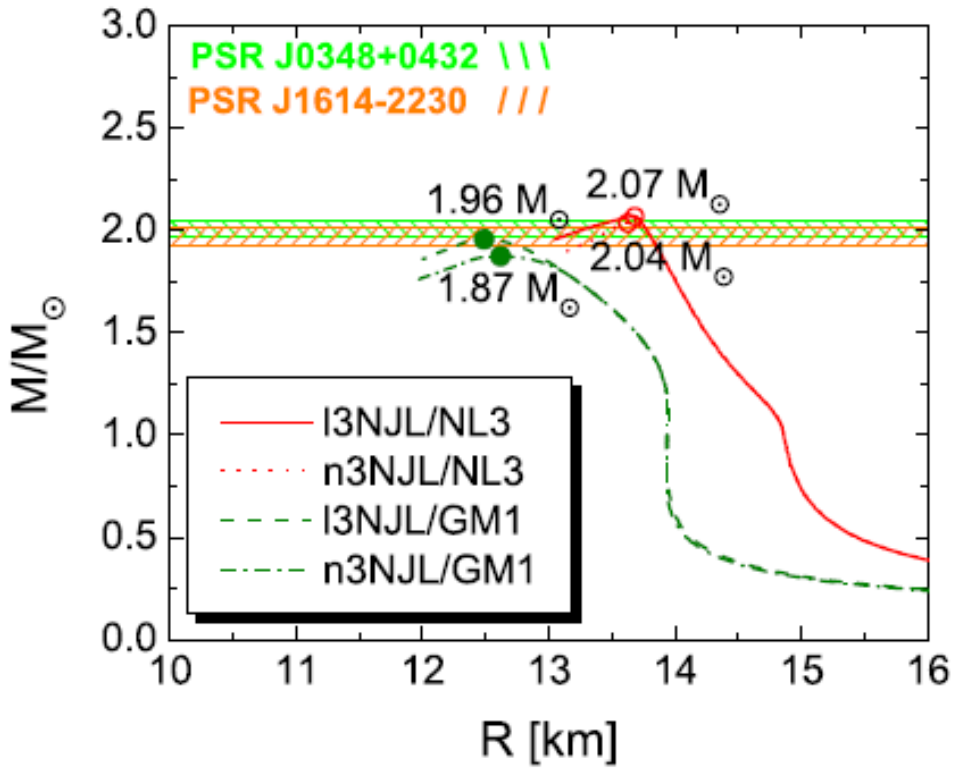
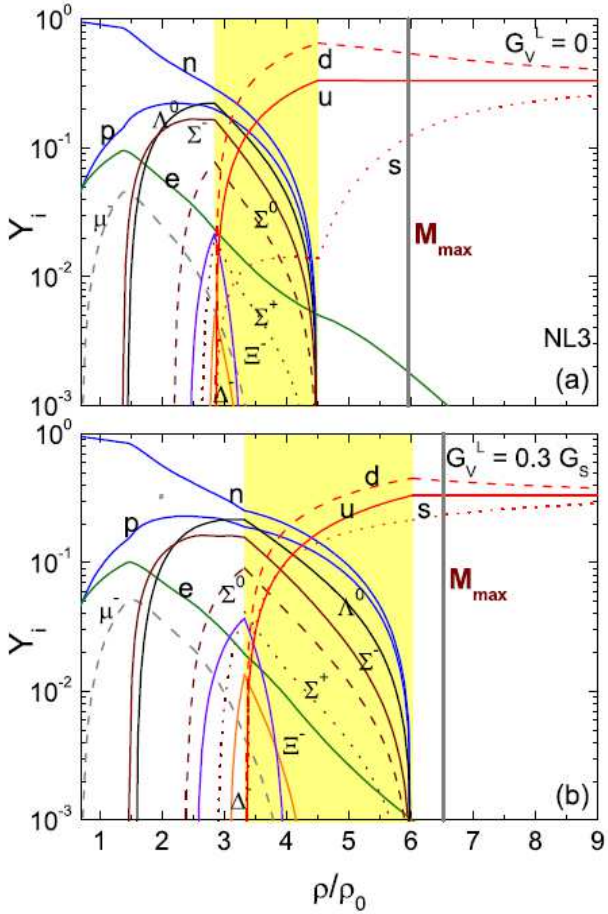
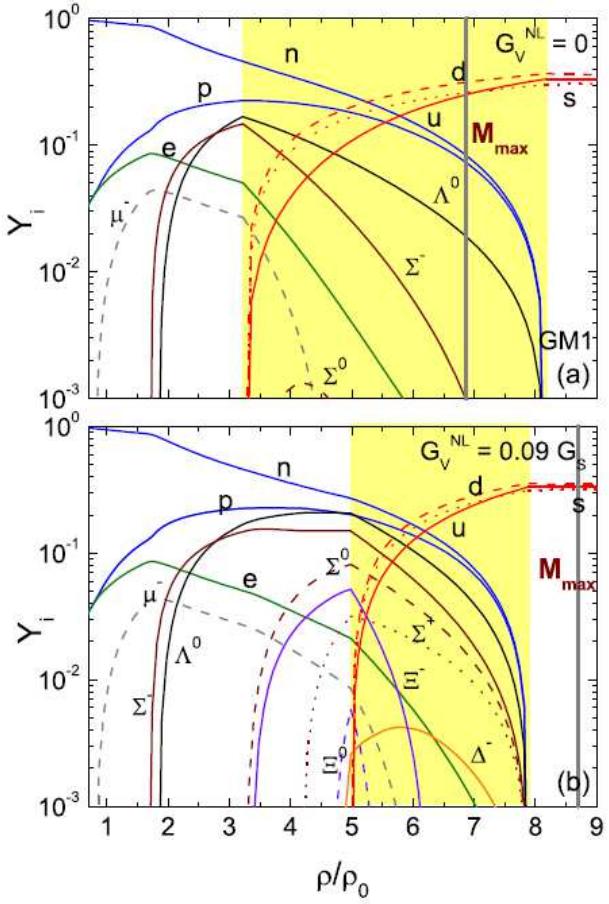
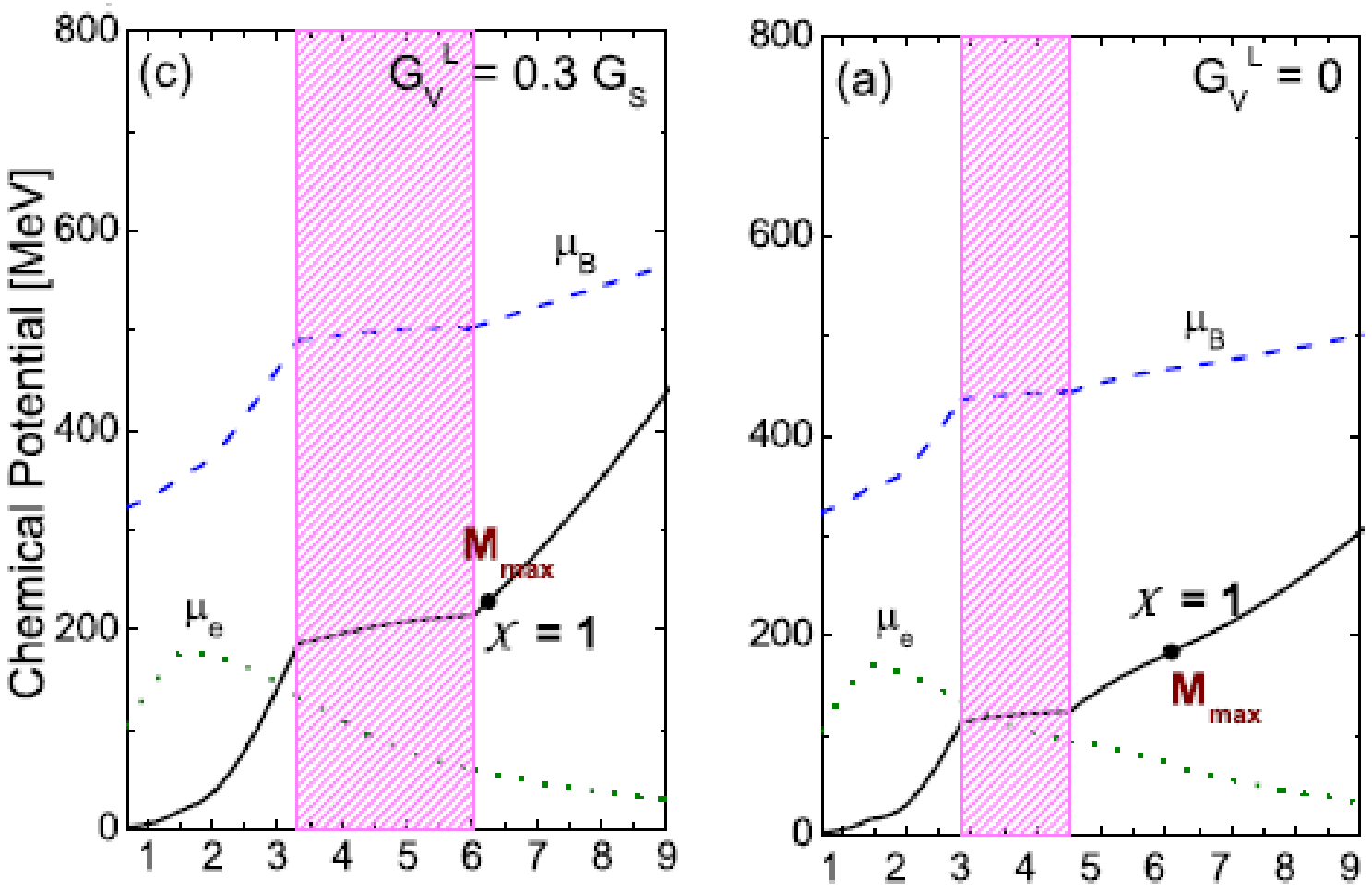
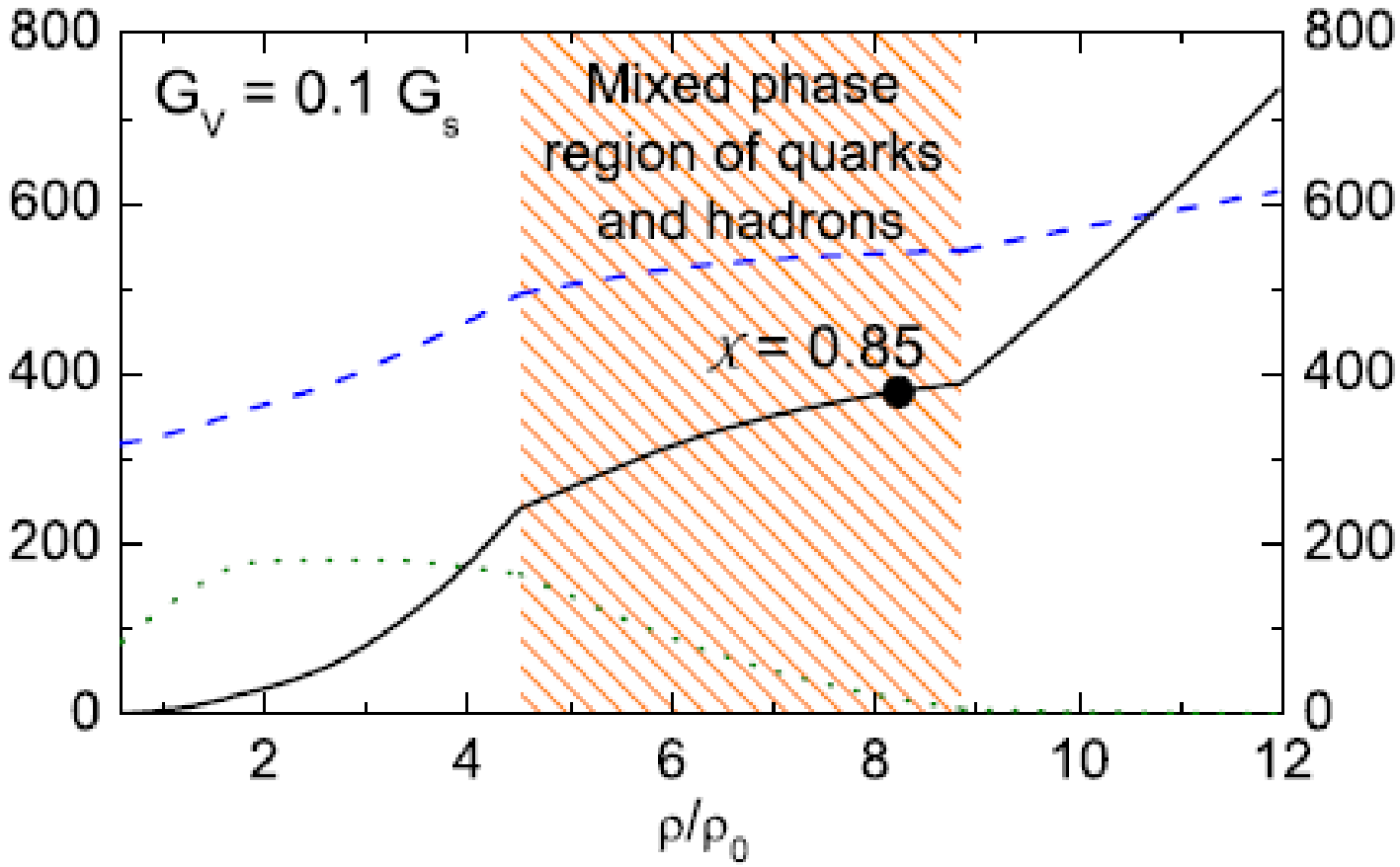


FIG. 6. (Color online) Same as Fig. 1, but with quark matter included. The vector repulsion is $G_V = 0$.


$G_V^L = 0$
NL3
(a)
$G_V^L = 0.3\ G_S$
(b)
M_{max}
Y_i
ρ/ρ_0


$G_V^{NL} = 0$
GM1
(a)
$G_V^{NL} = 0.09\ G_S$
(b)
M_{max}
Y_i
ρ/ρ_0


(c)
$G_V^L = 0.3\ G_S$
μ_B
μ_e
M_{max}
$\chi = 1$
Chemical Potential [MeV]
(a)
$G_V^L = 0$
μ_B
μ_e
$\chi = 1$
M_{max}


800
600
400
200
0
$G_V = 0.1\ G_S$
Mixed phase
region of quarks
and hadrons
$\chi = 0.85$
2
4
6
8
10
12
ρ/ρ_0

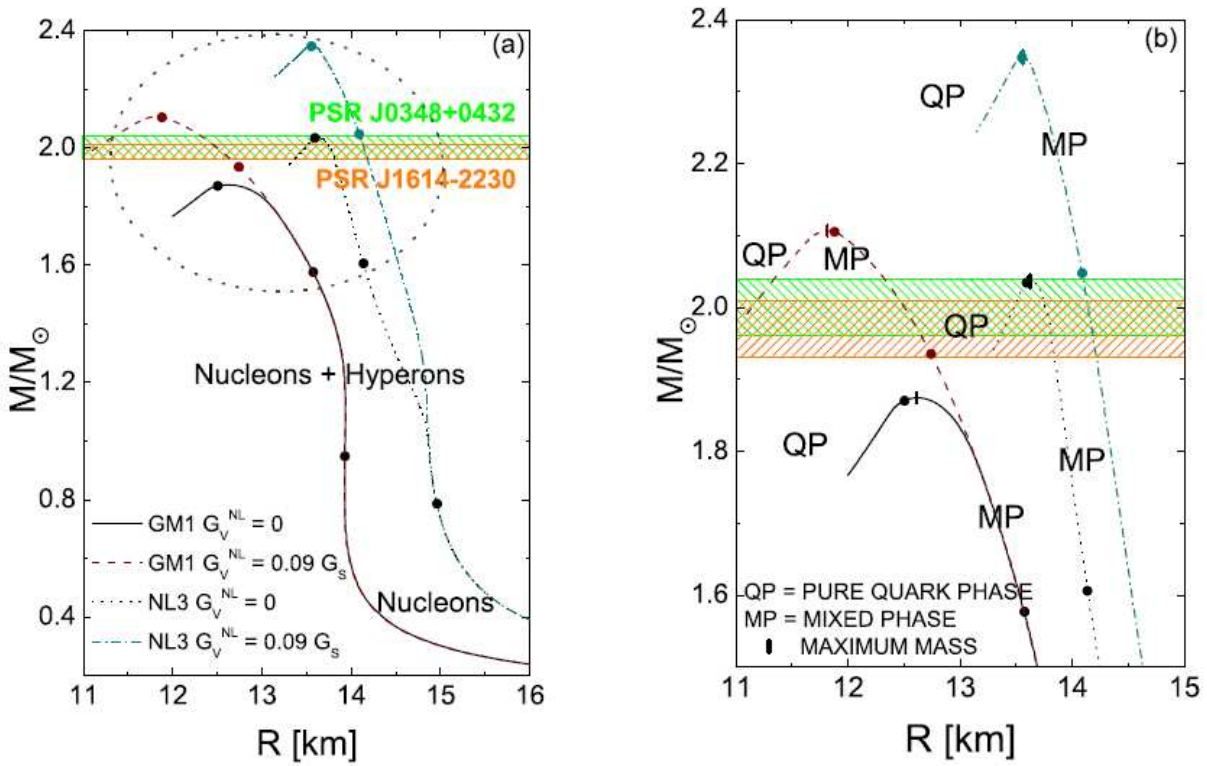


FIG. 14. (Color online) Same as Fig. 13, but computed for the non-local NJL model (n3NJL) and hadronic model parametrizations GM1 and NL3. (a) Mass-radius relationships of neutron stars made of quark-hybrid matter. (b) Enlargement of the circled region of (a).

Estrela de Quark?

The Astrophysical Journal, 730:31 (9pp), 2011 March 20 doi:10.1088/0004-637X/730/1/31
© 2011. The American Astronomical Society. All rights reserved. Printed in the U.S.A.

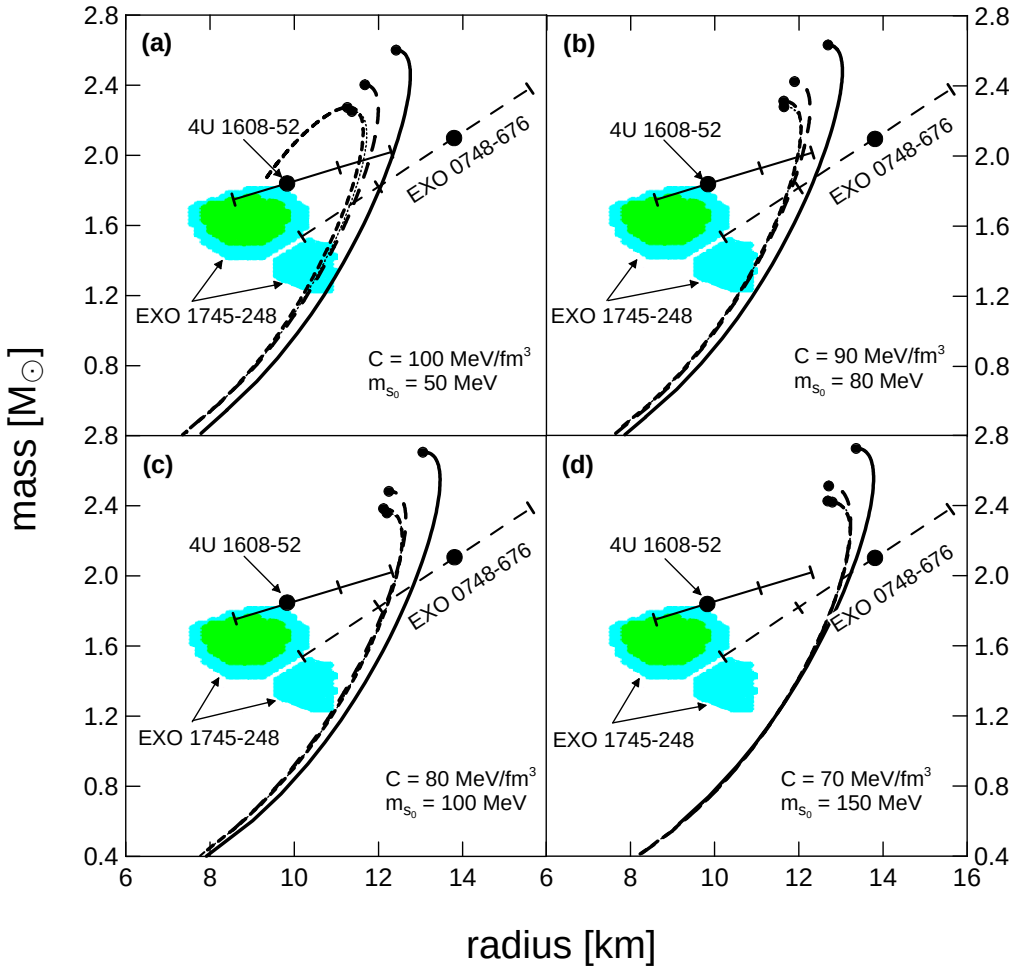
MASSIVE COMPACT STARS AS QUARK STARS

Hilário Rodrigues[1], Sérgio Barbosa Duarte[2], and José Carlos T. de Oliveira[3]
[1] Centro Federal de Educação Tecnológica do Rio de Janeiro Av Maracanã 249, 20271-110, Rio de Janeiro, RJ, Brazil; harg@cefet-rj.br
[2] Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas Rua Dr. Xavier Sigaud 150, 22290-180, Rio de Janeiro, RJ, Brazil; sbd@cbpf.br
[3] Departamento de Física, Universidade Federal de Roraima Campus do Paricarana s/n, 69310-270, Boa Vista, RR, Brazil; jcto@cbpf.br
Received 2010 May 3; accepted 2011 January 14; published 2011 March 1

ABSTRACT

High-mass compact stars have been reported recently in the literature, providing strong constraints on the properties of the ultra dense matter beyond the saturation nuclear density. In view of these results, the calculations of quark star or hybrid star equilibrium structure must be compatible with the provided observational data. But since the equations of state used in describing quark matter are in general too soft in comparison with the equation of states used to describe the hadronic or nuclear matter, the calculated quark star models presented in the literature are in general not suitable to explain the stability of highly-compact massive objects. In this work, we present the calculations of a spherically symmetric quark star structure by using an equation of state that takes into account the superconducting color–flavor locked phase of the strange quark matter. In addition, some fundamental aspects of QCD (asymptotic freedom and confinement) are considered by means of a phenomenological description of the deconfined quark phase, the density-dependent quark mass model. The quark matter behavior introduced by this model stiffens the corresponding equation of state. We thus investigate the influence of this model on the mass–radius diagram of quark stars. We obtain massive quark stars due to the stiffness of the equation of state, when a reasonable parameterization of the color superconducting gap is used. Models of quark stars enveloped by a nucleonic crust composed of a nuclear lattice embedded in an electron gas, with nuclei close to neutron drip line, are also discussed.

Key words: equation of state – stars: neutron – X-rays: individual (EXO 0748−676, EXO 1745−248, 4U 1608−52)


(a)
(b)
(c)
(d)
4U 1608-52
EXO 0748-676
EXO 1745-248
C = 100 MeV/fm^3
m_{s_0} = 50 MeV
C = 90 MeV/fm^3
m_{s_0} = 80 MeV
C = 80 MeV/fm^3
m_{s_0} = 100 MeV
C = 70 MeV/fm^3
m_{s_0} = 150 MeV
mass [$M_\odot$]
radius [km]

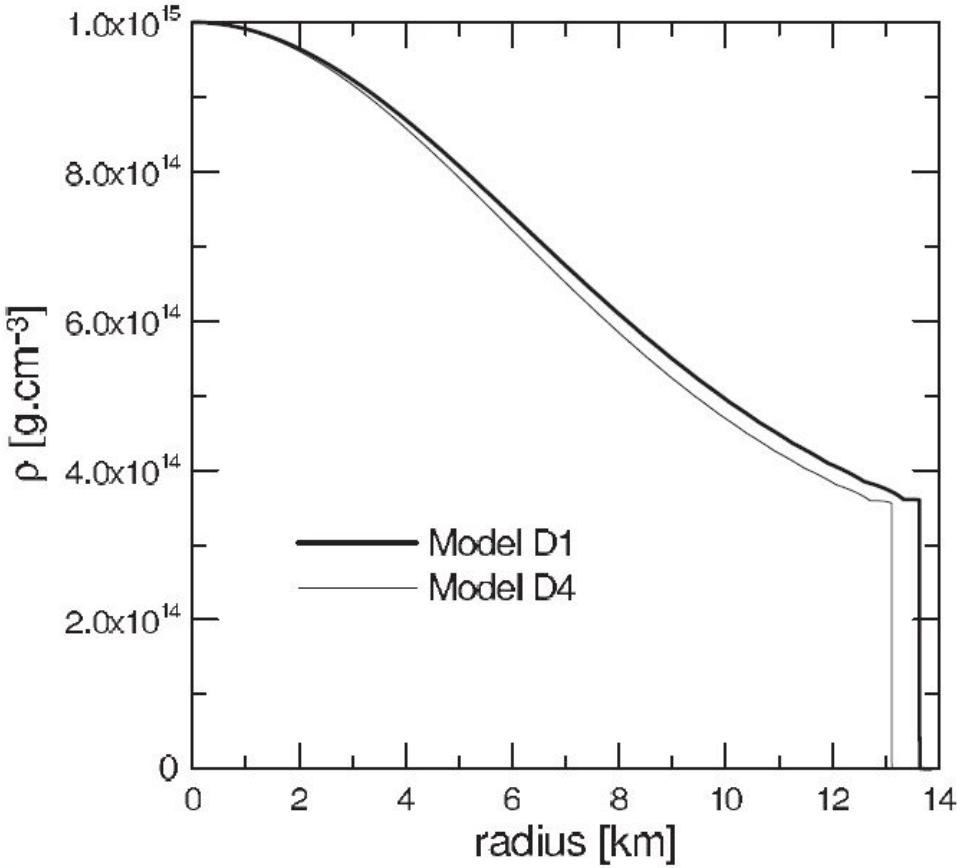


Figure 5. Energy density vs. radius of quark stars with central density $\rho_c = 1.0 \times 10^{15}\ \mathrm{g\,cm^{-3}}$ for the models D1 and D4 given in Table 1.

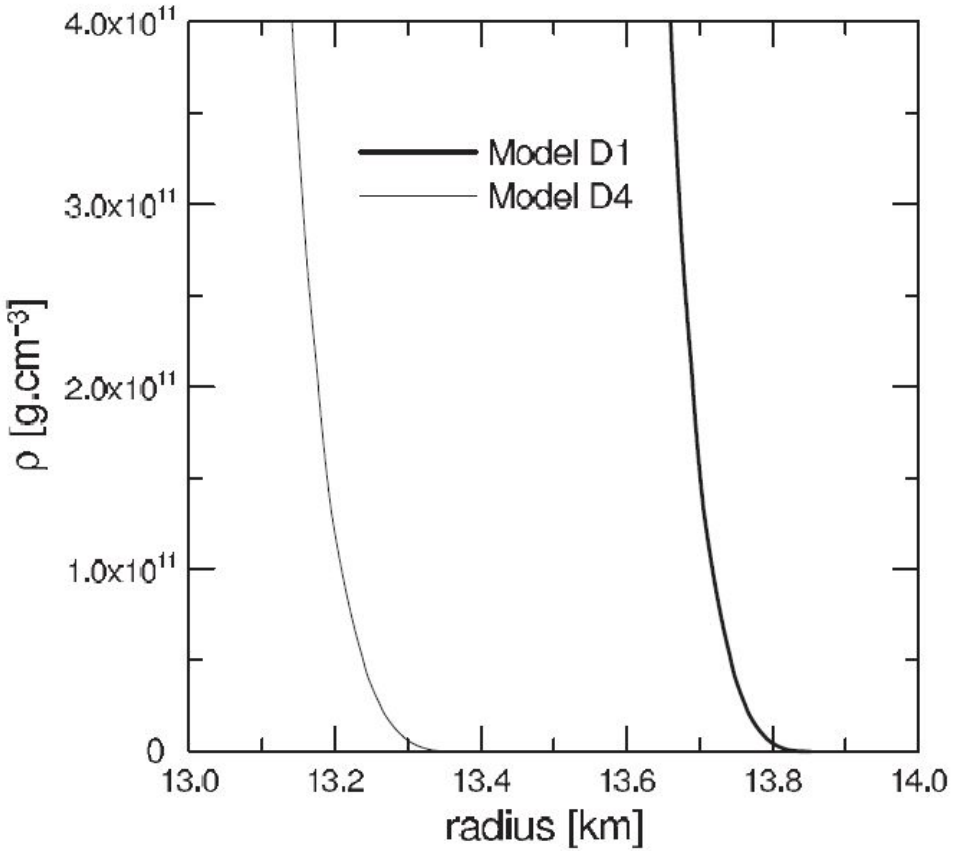


Figure 6. Details of the nuclear crusts of the quark stars displayed in the last figure.