

IX<sup>a</sup>. ESCOLA DO CBPF  
16 – 27 de Julho de 2012

Curso: SUPERCONDUTIVIDADE: uma introdução

Prof.: Paulo Pureur

Texto correspondente à 6<sup>a</sup>. Aula (24/07/2012)

## Capítulo 6

# SUPERCONDUTORES DE TIPO II

## 6.1. INTRODUÇÃO

### 6.1.1 A Energia de Superfície de uma Interface Normal-Supercondutor

A coexistência de domínios normais e supercondutores num dado material, em temperaturas inferiores à  $T_c$ , pode ocorrer na presença de campo magnético aplicado. Esta coexistência depende da energia de superfície associada à formação de interfaces entre as regiões normais e regiões supercondutoras. Este termo energético de superfície representa uma contribuição adicional à energia livre volumétrica que caracteriza o supercondutor na presença de campo magnético. Nos supercondutores de tipo I, em razão dos efeitos desmagnetizantes associados ao formato das amostras, pode haver a estabilização de um estado, denominado de estado intermediário, em que há coexistência de regiões normais e supercondutoras. A energia de superfície entre as regiões normais e supercondutoras controla a estrutura do estado intermediário. Neste caso, a energia de superfície é positiva. Assim, o sistema minimiza sua energia total de modo que ocorre a formação de uns poucos domínios de ambas as fases, com dimensões espaciais relativamente grandes, de modo que a área total das interfaces entre as regiões normais e regiões supercondutoras seja pequena. Se a energia de superfície for negativa, então será favorável ao supercondutor subdividir-se num grande número de pequenos domínios na presença de campo, de modo a maximizar a área total das interfaces. Este o caso dos supercondutores de tipo II.

A energia associada a uma interface N-S é expressa fenomenologicamente em termos de um comprimento característico que é aproximadamente igual à espessura da região de interface, onde o sistema não é tipicamente normal, nem verdadeiramente supercondutor. Assim, define-se a energia de superfície como

$$E_{Sup} = \frac{1}{2} \mu_0 H_c^2 \delta \quad , \quad (6.1)$$

onde  $\delta$  representa a espessura da interface. A coexistência em equilíbrio das fases normal e supercondutora exige que a intensidade do campo magnético na região de interface tenha o valor crítico. Portanto,  $(1/2)\mu_0 H_c^2$  é a densidade de energia livre

nesta região. Multiplicando esta densidade pelo comprimento característico  $\delta$ , teremos o termo que expressa a energia por unidade de superfície, equação (6.1).

As figuras 6.1(a) e (b) mostram que, qualitativamente,  $\delta \approx (\xi - \lambda)$ . Assim,  $\delta$  é positivo para supercondutores de tipo I, onde alcança valores típicos entre 100 e 1000 nm. No entanto,  $\delta$  é negativo para supercondutores de tipo II, onde  $\xi < \lambda$ .

Em supercondutores de tipo I, onde  $\lambda \ll \xi$  (ou seja,  $\kappa \ll 1$ ), o campo magnético penetra numa fina película superficial. No entanto, o parâmetro de ordem atinge o valor “volumétrico”,  $\psi_\infty$ , na escala de comprimento de  $\xi$ , tal como representado na parte superior da figura 6.1(a). Neste caso, a energia de condensação, que é proporcional a  $|\psi|^2$ , varia lentamente e tende a diminuir a energia eletrônica com relação a seu valor no estado normal na medida em que o volume supercondutor é penetrado a partir da superfície S-N. Por outro lado a energia magnética aumenta rapidamente devido a expulsão do fluxo pois o comprimento de penetração é pequeno em comparação ao comprimento de coerência. Conseqüentemente, a energia total possui um máximo nas proximidades da interface, o qual origina uma energia de superfície positiva que tende a inibir a formação de fronteiras N-S.

Nos supercondutores de tipo II, onde  $\kappa > 1$  (ou seja,  $\lambda > \xi$ ), a energia de condensação varia mais rapidamente do que a energia magnética nas proximidades da fronteira de fases, conforme mostra a fig. 6.1(b). Como resultado, a energia total possui um mínimo nas proximidades da interface N-S, o que corresponde a uma energia de superfície negativa, a qual favorece a formação destas interfaces.

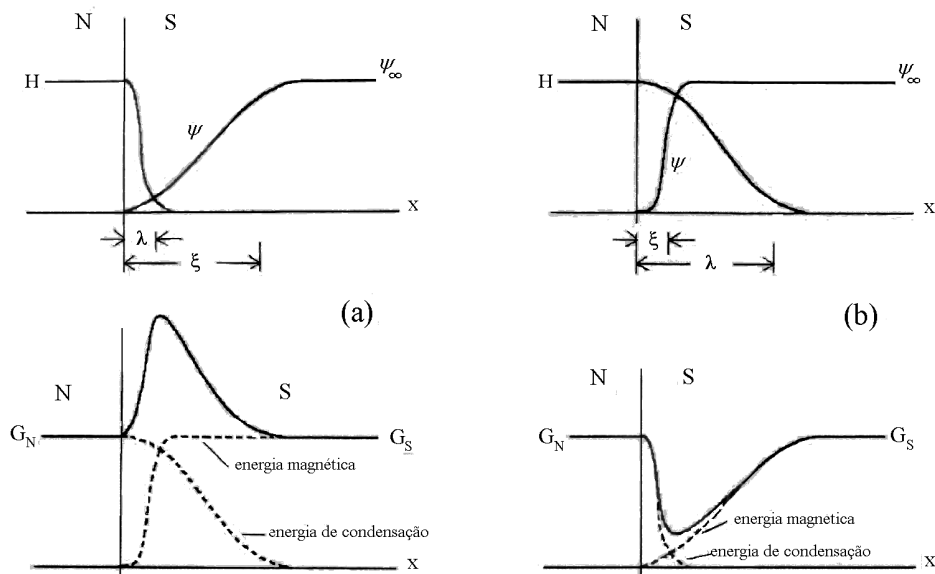


Figura 7.7. Energia na interface Normal-Supercondutor. (a) Energia de superfície positiva para supercondutores de tipo I ( $\kappa > 1$ ) e (b) energia de superfície negativa para supercondutores de tipo II ( $\kappa < 1$ ).

### 6.1.2 A Supercondutividade das Ligas

O caráter não-local da eletrodinâmica dos supercondutores faz com que o livre caminho médio eletrônico na fase normal tenha um papel relevante nas propriedades do estado superconductor. A eletrodinâmica não-local de Pippard mostra que o livre caminho médio  $l$  renormaliza o comprimento de coerência, sendo que um decréscimo em  $l$  tende a diminuir  $\xi$  a partir do valor  $\xi_{BCS}$  característico do sistema puro. O comprimento de penetração também é renormalizado, porém a diminuição de  $l$  tende a aumentar  $\lambda$  com relação ao valor intrínseco  $\lambda_L^{(BCS)}$ . Consequentemente, a diluição de impurezas num material puro pode fazê-lo evoluir do limite em que  $\kappa \ll 1$  para uma situação em que  $\kappa > 1$ . Estas considerações indicam que um sistema originariamente de tipo I, onde a energia de superfície N-S é positiva, pode passar a mostrar um comportamento magnético distinto e determinado por uma energia de interface N-S negativa. Isto faz com que as regiões normais (que podem ser atravessadas pelo fluxo magnético) se subdividam até que seja alcançado um limite quântico, no qual apenas um quantum de fluxo,  $\phi_0 = h/2e$ , atravessa a amostra através de uma estrutura em forma de tubo, denominada de vórtice. Estes tubos de fluxo formam um arranjo regular que caracteriza o chamado estado misto dos sistemas supercondutores de tipo II.

A supercondutividade de tipo II é típica de ligas e de sistemas impuros. Na figura 6.2 é mostrada a variação da resposta magnética do chumbo quando impurezas de índio são nele diluídas. Claramente o sistema evolui de um comportamento de tipo I para um de tipo II.

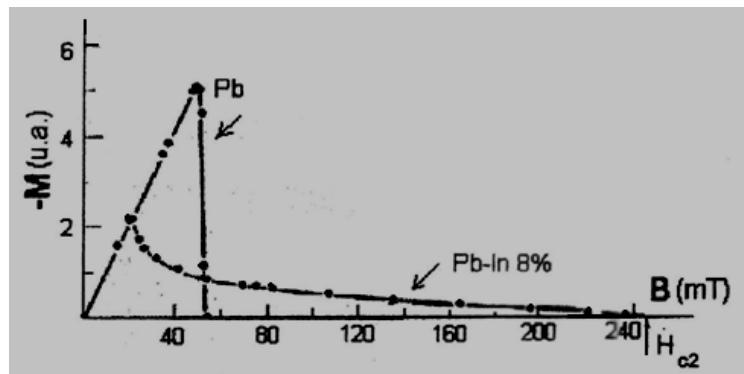


Figura 6.2. Magnetização do Pb no estado puro e com impurezas de In diluídas. (J. P. Livingston, 1963)

Existem sistemas que são do tipo II mesmo no limite em que o livre caminho médio se torna muito grande. Estes são os chamados supercondutores de tipo II intrínsecos. Dentre os elementos puros, os únicos desta classe são o nióbio e o vanádio. Porém, vários compostos intermetálicos, bem como os supercondutores

de alta temperatura crítica, também pertencem a esta categoria. A existência de sistemas de tipo II intrínsecos é consequência de uma forte interação de pareamento, a qual produz, naturalmente, um pequeno comprimento de coerência.

## 6.2. LINEARIZAÇÃO DAS EQUAÇÕES G-L

No estado misto dos supercondutores de tipo II, a densidade de pares de Cooper varia rápida e fortemente com a posição. Em particular, formam-se estruturas denominadas de vórtices, no centro das quais  $\psi(\vec{r}) \rightarrow 0$ . Esta é uma situação cuja descrição é operacionalmente muito difícil com a teoria BCS. Assim, a fenomenologia dos supercondutores de tipo II é basicamente descrita com a teoria G-L, cuja estrutura é especialmente adequada para tratar problemas em que  $\psi(\vec{r})$  varia acentuadamente com a posição.

Uma aproximação útil para se descrever um grande número de problemas em supercondutividade de tipo II é a chamada linearização das equações G-L. Esta aproximação consiste em desprezar o termo  $\beta |\psi|^2 \psi$  na equação (3.27) ou, equivalentemente, o termo  $(\beta/2) |\psi|^4$  na energia livre (3.23). Basicamente, esta aproximação somente se justifica se  $|\psi|^2 \ll \psi_0^2 = -\alpha/\beta$ . Assim, de fato, a teoria linearizada será aplicável em situações nas quais o campo magnético reduzir  $\psi$  a valores bem menores que o valor de equilíbrio na  $\psi_0$ .

A forma linearizada da primeira equação G-L (equação (4.27)) é

$$\frac{-\hbar^2}{2m^*} \left( \frac{\nabla}{i} - \frac{2\pi \vec{A}}{\phi_0} \right)^2 \psi = |\alpha| \psi \quad (6.1.a)$$

ou seja,

$$\left( \frac{\nabla}{i} - \frac{2\pi \vec{A}}{\phi_0} \right)^2 \psi = \frac{1}{\xi^2(T)} \psi, \quad (6.1.b)$$

onde usamos as definições para o comprimento de coerência (3.18) e para o quantum de fluxo (3.35).

Formalmente, a equação (6.1.a) é idêntica à equação de Schrödinger de uma partícula livre de massa  $m^* = 2m$  e carga  $e^* = 2e$  que se move na presença de um campo magnético  $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ , onde  $|\alpha|$  desempenha o papel de autovalor de energia. Esta propriedade permite as soluções e métodos familiares à Mecânica Quântica sejam diretamente aplicáveis à teoria G-L linearizada.

### 6.3. O CAMPO CRÍTICO SUPERIOR

Consideremos o problema da nucleação de supercondutividade em amostras massivas na presença de um campo magnético aplicado na direção  $z$ . Escolhemos, então, o calibre

$$\vec{A} = (0, Bx, 0) \quad (6.2)$$

pois deve-se ter  $\nabla \times \vec{A} = B \hat{k}$ . Com esta escolha, a equação (6.1.a) se torna

$$\frac{-\hbar^2}{2m^*} \left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \left( \frac{\partial}{\partial y} - \frac{2\pi i B}{\phi_0} x \right)^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \psi = |\alpha| \psi \quad (6.3)$$

Como o potencial efetivo depende apenas de  $x$ , podemos tentar soluções do tipo

$$\psi = e^{i\beta y} e^{ik_z z} f(x) \quad (6.4)$$

que, substituídas em (8.3), levam à seguinte equação para  $f(x)$ :

$$\frac{-\hbar^2}{2m^*} \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \left( \beta - \frac{2\pi B}{\phi_0} x \right)^2 \right] f(x) = \varepsilon' f(x) \quad (6.5)$$

onde definimos

$$\varepsilon' = |\alpha| - \frac{\hbar^2}{2m^*} k_z^2 \quad (6.6)$$

Isto mostra que o movimento na direção  $z$ , isto é, na direção do campo, é exatamente o de uma partícula livre. Contudo, o movimento no plano  $(x,y)$  é alterado, e teremos que resolver a equação de autovalores unidimensional (6.5). Reescrevendo esta equação na forma

$$\frac{-\hbar^2}{2m^*} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{1}{2} m^* \left( \frac{2\pi \hbar B}{\phi_0 m^*} x - \frac{\hbar \beta}{m^*} \right)^2 f(x) = \varepsilon' f(x) \quad (6.7)$$

reconhecemos a equação de Schrödinger de um oscilador harmônico simples que oscila em torno do ponto

$$x_0 = \frac{\beta\phi_0}{2\pi B} \quad (6.8)$$

e tem frequência de oscilação dada por

$$\omega_B = \frac{2\pi \hbar B}{\phi_0 m^*} = \frac{e^* B}{m^*} . \quad (6.9)$$

Portanto, as auto-energias serão

$$\varepsilon' = \left( n + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega_B . \quad (6.10)$$

Este resultado mostra que as super-partículas descrevem órbitas ciclotrônicas quantizadas no plano  $(x, y)$ , enquanto conservam sua energia cinética translacional de partícula livre ao longo da direção do campo magnético.

Os autovalores para  $|\alpha|$  serão

$$|\alpha| = \frac{\hbar^2}{2m^*} k_z^2 + \left( n + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega_B . \quad (6.11)$$

O menor valor possível para  $\alpha$  corresponde a  $k_z = 0$  e  $n = 0$ . Isto define o valor máximo da indução magnética,  $B = B_{c2}$ , para a qual uma solução com  $|\alpha| \neq 0$  existe. Em outros termos, o menor valor para os autovalores dados pela equação (6.11) corresponde à máxima indução magnética em que a supercondutividade pode nuclear no interior de uma amostra massiva. Assim, combinando as equações (6.11) e (4.18) obtemos,

$$\frac{\hbar^2}{2m^*} \frac{1}{\xi^2(T)} = \frac{\hbar}{2} \left( \frac{e^* B_{c2}}{m^*} \right) ,$$

que resulta em

$$B_{c2} = \frac{\phi_0}{2\pi\xi^2(T)} . \quad (6.12)$$

Em geral, na teoria da supercondutividade representa-se este valor crítico do campo magnético através da intensidade  $H_{c2} = B_{c2} / \mu_0$ . Assim, em unidades MKS, temos

$$H_{c2} = \frac{\phi_0}{2\pi\mu_0\xi^2(T)} . \quad (6.13)$$

Podemos também relacionar  $H_{c2}$  com o campo crítico termodinâmico  $H_c$ . Para tanto, usamos a equação (4.36) e a definição (4.38) e obtemos

$$H_{c2} = \sqrt{2} \kappa H_c \quad (6.14)$$

Esta seleção deixa claro que o valor  $\kappa = 1/\sqrt{2}$  separa os sistemas para os quais  $H_{c2} > H_c$  (supercondutores do tipo II) dos sistemas onde  $H_{c2} < H_c$  (tipo I).

Como  $H_{c2}$  é um campo de nucleação, a análise acima implica que os sistemas de tipo II, submetidos a campos magnéticos decrescentes, tornam-se supercondutores através de uma transição de fase de segunda ordem na qual  $|\alpha|$  (e, portanto,  $|\psi|^2$ ) cresce continuamente a partir do valor nulo quando  $H = H_{c2}$ . Por outro lado, nos sistemas de tipo I,  $H_{c2}$  representa o limite inferior de campo referente a um fenômeno do tipo super-congelamento. Em outros termos, ao diminuirmos lentamente o campo aplicado, em condições que evitem quaisquer perturbações mecânicas, o sistema permanece normal abaixo de  $H_c$  até que o valor  $H_{c2}$  seja alcançado. Então a supercondutividade é nucleada brusca e irreversivelmente, como no fenômeno de super-congelamento de um líquido (que é característico de transições de fase de primeira ordem).

## 6.4 O ESTADO DE VÓRTICES

### 6.4.1 A Rede de Vórtices de Abrikosov em Campos Próximos a $H_{c2}$

As autofunções da equação (6.7) são dadas por

$$f(x) = \exp\left[-\frac{(x-x_0)^2}{2\xi^2(T)}\right]. \quad (6.15)$$

Portanto, a solução completa, equação (6.4), da equação (6.3) que fornece o parâmetro de ordem em  $H = H_{c2}$  é

$$\psi_\beta = e^{i\beta y} \exp\left[-\frac{(x-x_0)^2}{2\xi^2(T)}\right], \quad (6.16)$$

já que  $k_z = 0$  para este valor máximo de campo. O parâmetro  $\beta$  é arbitrário, porém ligado a  $x_0$  através da equação (6.8). Cada uma das soluções (6.16) corresponde a



uma fatia Gaussiana de supercondutividade, de meia largura  $\xi$  e centrada no ponto  $x = x_0 = \beta\phi_0 / 2\pi B$ . É razoável supor que a solução para o parâmetro de ordem que minimize a energia livre G-L seja uma combinação linear das funções  $\psi_\beta$ , ou seja,

$$\psi_L = \sum_{\beta} c_{\beta} \psi_{\beta} = \sum_{\beta} c_{\beta} e^{i\beta y} e^{-\frac{1}{2\xi^2}[x-x_0(\beta)]^2} . \quad (6.17)$$

Por outro lado, como as funções  $\psi_\beta$  mostram que a supercondutividade é nucleada em torno de certos pontos no plano  $(x, y)$ , é também razoável supor que o parâmetro de ordem em (6.17) tenha uma estrutura periódica neste plano.

Assim, devemos considerar que a solução geral (6.17) para a equação G-L linearizada em  $H = H_{C2}$  tem a forma

$$\psi_L = C \sum_n e^{iqny} e^{-\frac{1}{2\xi^2}[x-x_0(n)]^2} , \quad (6.18)$$

onde  $C$  é uma constante,  $n$  é um inteiro,  $\beta_n = nq$ ,  $\Delta y = 2\pi / q$ , e

$$x_0(n) = \frac{nq\phi_0}{2\pi B} , \quad (6.19)$$

a qual é periódica no plano  $x$ - $y$  por construção.

Assim a solução (6.18) é do tipo:

$$\psi_L = C \sum_n \psi_n(x, y) = C \sum_n \psi_n(x + \Delta x, y + \Delta y).$$

A periodicidade  $\Delta x$  é obtida de (6.19), ou seja,

$$\Delta x = \frac{q\phi_0}{2\pi B} = \frac{\phi_0}{\Delta y B} , \quad (6.20)$$

ou seja,

$$B \Delta x \Delta y = \phi_0 . \quad (6.21)$$

Este resultado significa que cada cela unitária de arranjo periódico de distribuição do fluxo magnético na superfície do supercondutor é atravessada exatamente por um quantum de fluxo. A solução de Abrikosov para a rede de vórtices está mostrada na figura 6.3.

É possível mostrar que as linhas de “ $|\psi_L|^2$  constante” mostradas na figura 8.1 coincidem com os contornos de  $|B| = cte$  e com as linhas de fluxo de corrente. A rede de vórtices quadrada originalmente proposta por Abrikosov não corresponde ao estado de menor energia possível. Para encontrar esta solução, é necessário considerar o termo proporcional a  $|\psi|^4$  na expressão para a energia livre de Ginzburg-Landau e efetuar alguns cálculos numericamente. Um pequeno erro numérico levou Abrikosov a concluir erroneamente que o arranjo quadrado da figura 6.3(a) seria o mais estável. Mais tarde, Kleiner e colaboradores (1964) retificaram este erro ao mostrarem que o arranjo triangular é de fato o mais favorável dentre todas as possíveis soluções periódicas. A rede proposta por Kleiner e colaboradores está mostrada na figura 6.3(b). Alguns anos depois deste trabalho, Essmann e Trübler (1967) demonstraram experimentalmente através de experiências de decoração com pó ferromagnético que os vórtices se organizam numa rede triangular (ou hexagonal).

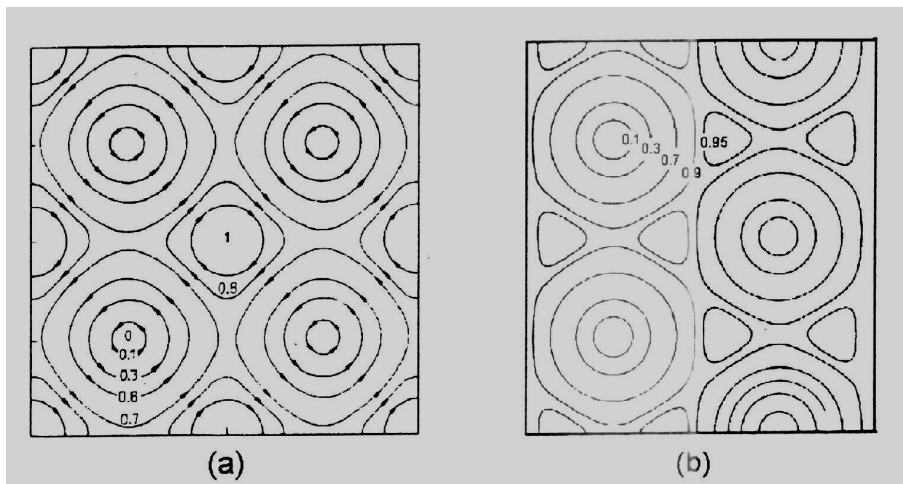


Figura 6.3. (a) *Curvas de nível no plano (x,y) para  $|\psi_L|^2$  segundo a solução de Abrikosov para a rede de vórtices quadrada (Abrikosov, 1957).* (b) *Curvas de nível para  $|\psi_L|^2$  segundo a solução de Kleiner, Roth e Auther (1964) para a rede de vórtices triangular.*

É interessante notar que este resultado está em acordo com um argumento simples baseado no fato de que no arranjo triangular cada vórtice está rodeado de 6 outros vórtices (ver figura 6.4), de modo que a distância entre vizinhos mais próximos é:

$$a_{\Delta} = \left(\frac{4}{3}\right)^{1/4} \left(\frac{\phi_0}{B}\right)^{1/2} = 1.075 \left(\frac{\phi_0}{B}\right)^{1/2} \quad (6.22)$$

ao passo que para a rede quadrada

$$a_{\square} = (\phi_0/B)^{1/2} . \quad (6.23)$$

Então, para uma dada densidade de fluxo  $a_{\Delta} > a_{\square}$ . Levando-se em conta que os vórtices repelem-se mutuamente, é razoável supor que a estrutura com maior separação entre vizinhos mais próximos seja favorecida energeticamente.

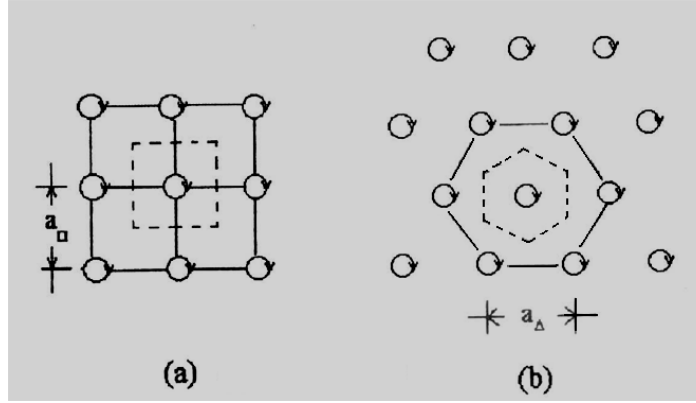


Figura 6.4. Redes de vórtices quadrada (a) e triangular (b). A cela unitária básica está assinalada pelas linhas tracejadas.

#### 6.4.2 A Estrutura de um Vórtice Isolado

A descrição detalhada de um vórtice num supercondutor de tipo II com parâmetro de Ginzburg-Landau qualquer em requer um tratamento numérico das equações G-L. No entanto, no limite de tipo II extremo, onde  $\kappa \gg 1$ , resultados analíticos úteis podem ser obtidos. A simplificação decorre do fato de que  $\psi$  varia de zero até ao valor “de volume”  $\psi_{\infty}$  numa pequena região de raio  $\xi$ . Portanto, na maior parte do vórtice (de raio  $\lambda \gg \xi$ ) o sistema pode ser descrito como um supercondutor de London, no qual o módulo do parâmetro de ordem não varia com a posição. Em outros termos, fora da região do caroço normal (de raio  $\xi$ ), a segunda equação G-L (para a densidade de super-corrente) se reduz à equação de London. Então, fora do caroço, podemos escrever

$$\lambda^2 (\nabla \times \nabla \times \vec{h}) + \vec{h} = 0 . \quad (6.24)$$

Esta equação, entretanto, descreve estritamente um supercondutor no limite de London em que não há penetração de fluxo magnético senão numa camada superficial da amostra. Para descrever o fato de que o vórtice tem um caroço normal, que é atravessado por um quantum de fluxo  $\phi_0$ , devemos transformar (6.24) como

$$\lambda^2 (\nabla \times \nabla \times \vec{h}) + \vec{h} = \hat{k} \frac{\phi_0}{\mu_0} \delta(\vec{r}) \quad (6.25)$$

onde  $\hat{k}$  é um vetor unitário na direção do vórtice,  $\delta(\vec{r})$  é uma singularidade bi-dimensional localizada em  $\vec{r} = 0$  no plano perpendicular a  $\hat{k}$  e há um quantum de fluxo por vórtice.

A lei de Gauss do magnetismo,

$$\nabla \cdot \vec{h} = \nabla \cdot \frac{\vec{B}}{\mu_0} = 0$$

e a identidade vetorial

$$\nabla \times \nabla \times \vec{h} = -\nabla^2 \vec{h} + \nabla (\nabla \cdot \vec{h})$$

são usadas para escrevermos (6.25) como

$$\nabla^2 \vec{h} - \frac{\vec{h}}{\lambda^2} = -\hat{k} \frac{\phi_0}{\mu_0 \lambda^2} \delta(\vec{r}). \quad (6.26)$$

Esta equação tem a solução exata, dada por

$$h(r) = \frac{\phi_0}{2\pi\lambda^2\mu_0} K_0\left(\frac{r}{\lambda}\right) \quad (6.27)$$

onde  $K_0$  é uma função de Bessel de ordem zero e argumento imaginário.

As formas limite da equação (6.27) são:

$$h(r) \rightarrow \frac{\phi_0}{2\pi\lambda^2\mu_0} \left(\frac{\pi\lambda}{2r}\right)^{1/2} e^{-\frac{r}{\lambda}} \quad (r \rightarrow \infty) \quad (6.28)$$

$$h(r) \approx \frac{\phi_0}{2\pi\lambda^2\mu_0} \left[ \ln \frac{\lambda}{r} + 0.12 \right] \quad (\xi \ll r \ll \lambda) \quad (6.29)$$

Na figura 6.5 está representada a variação do campo magnético microscópico,  $h(r)$ , em torno da posição de um vórtice. Deve-se notar que a divergência logarítmica em (6.29) é, de fato, arredondada por um "cut-off" em  $r \sim \xi$ , pois  $|\psi|^2$  começa a se anular nesta região.

A densidade de corrente associada com o campo magnético microscópico da equação (6.27) é obtida da equação de Ampère,

$$\vec{j} = \nabla \times \vec{h}.$$

Isto significa que  $|\vec{j}| \approx |d\vec{h} / d\vec{r}|$ , que está também representada na figura 6.5.

A variação do parâmetro de ordem em torno do vórtice deve ser obtida a partir de uma análise com as equações G-L (3.27) e (3.28). A forma que se obtém para  $\psi(r)$  é do tipo

$$\psi = \psi_{\infty} f(r) e^{i\theta},$$

em que  $f \approx \tanh(r/\xi)$  se aproxima da saturação a uma distância  $r \approx 2\xi$  do centro de vórtice. A variação de  $\psi$  em função de  $r$  também está representada na figura 6.5.

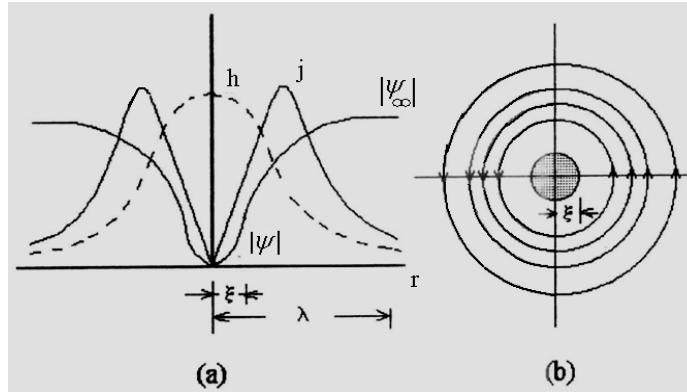


Figura 6.5. (a) Estrutura de um vórtice de Abrikosov. A linha cheia representa o módulo do parâmetro de ordem, que se anula na posição do vórtice. A linha pontilhada representa o campo magnético microscópico, que é máximo na posição de vórtice e a linha tracejada representa o módulo da densidade de corrente de blindagem que circula em torno do caroço normal. (b) Vista do plano  $(x, y)$ . A região hachurada de diâmetro  $\xi$  é o caroço normal.

### 6.4.3 O Campo Crítico Inferior $H_{c1}$

Quando o fluxo magnético começa a penetrar num supercondutor do tipo II, os vórtices encontram-se muito afastados uns dos outros. Enquanto a separação entre vórtices for grande comparativamente a  $\lambda$ , podemos tratá-los isoladamente. Assim, o campo crítico inferior,  $H_{c1}$ , que demarca o início do processo de

penetração de fluxo, pode ser calculado com a teoria de Ginzburg-Landau e o resultado encontrado é:

$$H_{c1} = \frac{\phi_0}{4\pi \lambda^2 \mu_0} \ln \kappa , \quad (6.30)$$

que não é aplicável no limite  $\kappa \approx 1$ . Usando a relação (4.37), obtemos também a expressão

$$H_{c1} = \frac{H_c}{\sqrt{2} \kappa} \ln \kappa . \quad (6.31)$$

Comparando as equações (6.31) e (6.14) vemos que,

$$H_c^2 \ln \kappa = H_{c1} H_{c2} , \quad (6.32)$$

que mostra que o campo crítico termodinâmico,  $H_c$ , é, aproximadamente, a média geométrica entre  $H_{c1}$  e  $H_{c2}$ .

A figura 6.6 mostra um diagrama de fases  $H$  versus  $\kappa$  que resume os resultados obtidos para os campos críticos  $H_c$ ,  $H_{c1}$  e  $H_{c2}$ .

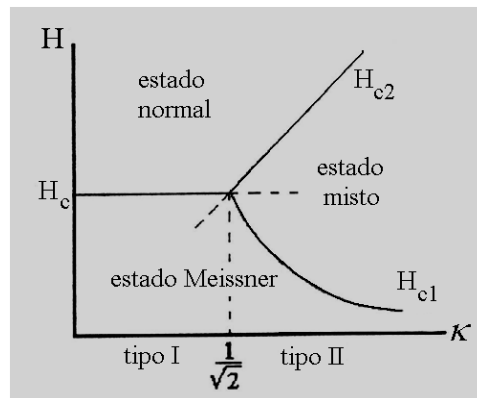


Figura 6.6. O diagrama mostra as três fases de um supercondutor em campo magnético aplicado e em função do parâmetro de Ginzburg-Landau  $\kappa$ .

## 6.6 A MAGNETIZAÇÃO DE EQUILÍBRIO

### 6.6.1 A Interação entre Vórtices

É relativamente simples tratar a interação entre vórtices no limite  $\kappa \gg 1$ . Neste caso, o meio é linear, tal como mostra a equação (6.25), e o campo criado

por dois vórtices é simplesmente a soma dos campos criados por cada vórtice individualmente. Então, podemos escrever

$$\vec{h}(\vec{r}) = \vec{h}_1(\vec{r}) + \vec{h}_2(\vec{r} - \vec{r}_{12}),$$

onde supomos que o vórtice 1 está na origem e o outro está na posição  $\vec{r}_{12}$ .

Pode-se então mostrar que a energia associada ao sistema de dois vórtices é simplesmente a soma das energias individuais de cada vórtice mais um termo de interação

$$\varepsilon_t = 2\varepsilon_1 + \varepsilon_{12},$$

onde a energia de interação (por unidade de comprimento),

$$\varepsilon_{12} = \phi_0 h(|\vec{r}_{12}|),$$

é igual ao quantum de fluxo multiplicado pelo campo criado por um vórtice na posição do outro. Usando a equação (6.27), temos

$$\varepsilon_{12} = \frac{\phi_0^2}{2\pi\lambda^2\mu_0} K_0\left(\frac{r_{12}}{\lambda}\right), \quad (6.33)$$

A equação acima mostra que, para  $r_{12} \gg \lambda$ , a interação decai como  $r_{12}^{-1/2} e^{-r_{12}/\lambda}$  e varia logarithmicamente em pequenas distâncias. A interação (6.33) é positiva e os vórtices se repelem uns aos outros. A força por unidade de comprimento exercida pelo vórtice 1 sobre o vórtice 2 na direção  $x$  é dada por

$$f_{2x} = -\frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_2} = -\phi_0 \frac{\partial h(r_{12})}{\partial x_2}.$$

Lembrando que  $\vec{j} = \nabla \times \vec{h}$  e supondo que o campo magnético é orientado ao longo da direção  $z$ , teremos

$$f_{2x} = \phi_0 j_{1y}. \quad (6.34)$$

Esta expressão mostra que a força sobre o vórtice 2, ao longo da linha que une os vórtices, é proporcional à componente da super-corrente gerada pelo vórtice

1 que é normal a esta linha. A figura 6.7 ilustra a interação repulsiva entre vórtices.

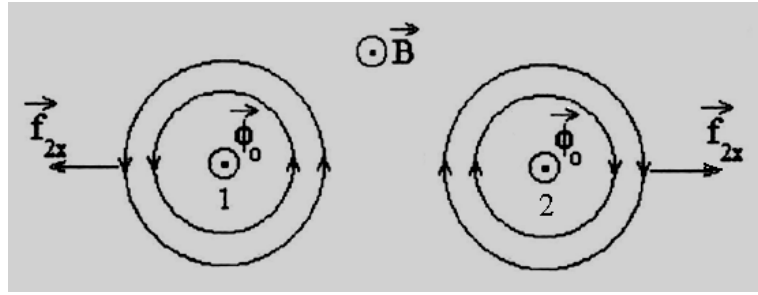


Figura 6.7. Interação repulsiva entre dois vórtices.

Escrevendo a equação (6.34) numa forma vetorial, teremos

$$\vec{f}_2 = \vec{j}_1(r_{12}) \times \vec{\phi}_0, \quad (6.35)$$

onde a direção de  $\vec{\phi}_0$  coincide com a direção do campo aplicado. Se houverem muitos vórtices presentes, a força total sobre um dado vórtice será dada pela superposição de contribuições do tipo (6.35), ou seja,

$$\vec{f} = \vec{j}_s \times \vec{\phi}_0, \quad (6.36)$$

onde  $\vec{j}_s$  representa a densidade de super-corrente total, gerada por todos os outros vórtices, na posição do vórtice em questão. A equação (6.36) mostra que um vórtice somente estará em equilíbrio numa dada posição se a velocidade de super-fluido gerada por todos os outros vórtices for nula nesta posição. Isto ocorre se os vórtices se arranjam numa rede periódica.

### 6.6.2 A Indução Magnética e a Magnetização de Equilíbrio no Estado Misto

Podemos distinguir três regimes de variação das curvas de indução magnética em função do campo magnético aplicado (ou, equivalentemente,  $M$  versus  $H$ ) no intervalo  $H_{c1} < H < H_{c2}$ . A indução magnética no estado misto é  $B = N\phi_0$ , onde  $N$  é o número de vórtices por unidade de superfície de amostra. Assim a separação entre vórtices,  $a$ , é proporcional a  $N^{-1/2}$ . Então, nas proximidades de  $H_{c1}$  ocorre um regime de baixa densidade de fluxo, onde  $a$  é grande, pois existem poucos vórtices. Nesta região,  $B$  pode crescer rapidamente com o campo aplicado, conforme ilustra a figura 1.11(b), pois a repulsão mútua



entre vórtices será pequena. Uma análise baseada na teoria G-L fornece, neste regime,

$$B = \frac{2\phi_0}{\sqrt{3}\lambda^2} \frac{1}{\left\{ \ln \left[ \frac{3\phi_0}{4\pi\lambda^2\mu_0(H - H_{c1})} \right] \right\}^2}. \quad (6.37)$$

Nota-se, da equação acima, que  $B$  é contínuo em  $H = H_{c1}$ , o que corresponde a uma transição de fase de 2ª ordem. Porém, a inclinação da curva  $B$  versus  $H$  é infinita quando  $H \rightarrow H_{c1}$ . Ainda existem dúvidas quanto ao caráter da transição em  $H = H_{c1}$ . Certos dados experimentais parecem indicar que  $B$  varia descontinuamente neste campo crítico, o que corresponderia a uma transição de 1ª ordem.

Ao se aumentar progressivamente a intensidade do campo magnético aplicado, aumenta a densidade de vórtices e a interação entre eles passa a se tornar relevante. Neste regime de densidades de fluxo intermediárias, a indução magnética cresce mais lentamente com o campo externo, conforme mostrado na figura 1.11(b).

Se o campo aplicado for aumentado mais ainda, eventualmente será alcançado um regime para o qual  $a \approx \xi$ . Neste caso, os vórtices estarão compactamente arranjados e os caroços ocuparão a maior parte do volume do material. Em  $H_{c2}$ , os caroços normais começam a se sobrepor e o volume superconductor tende continuamente a zero. Nesta região, a análise deve ser feita a partir da solução de Abrikosov, discutida na secção 6.4. Neste caso, é possível mostrar que, para a rede triangular de vórtices, a indução magnética se aproxima continuamente do valor correspondente à fase normal de acordo com a expressão

$$B = \mu_0 H - \mu_0 \frac{(H_{c2} - H)}{1.16(2\kappa^2 - 1)}, \quad (6.38)$$

e, portanto, a magnetização de equilíbrio é dada por

$$M = \frac{H_{c2} - H}{1.16(2\kappa^2 - 1)}. \quad (6.39)$$

Uma característica interessante desta equação é a presença do fator  $(2\kappa^2 - 1)$  no denominador. Este fator se anula quando  $\kappa = 1/\sqrt{2}$ , o qual se constitui no critério para diferenciar os sistemas de tipo I e II.. A variação qualitativa da magnetização com o parâmetro  $\kappa$  está esquematizada na figura 6.8.

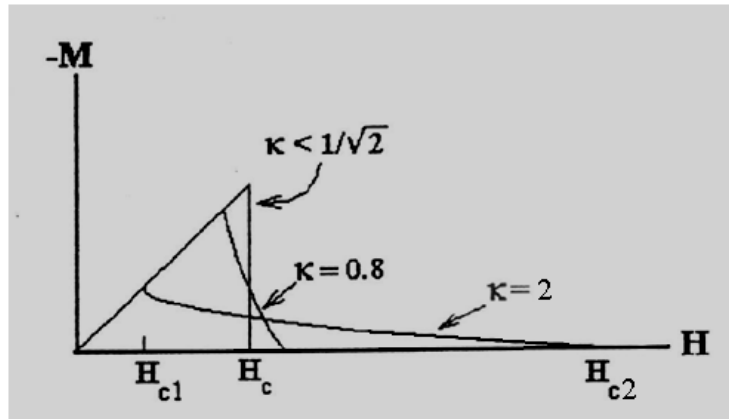


Figura 6.8. Curvas de magnetização para três supercondutores com o mesmo valor de campo crítico termodinâmico  $H_c$ , mas com diferentes valores de  $\kappa$ .

## 6.7. PROPRIEDADES IRREVERSÍVEIS

### 6.7.1. O Aprisionamento das Linhas de Fluxo Magnético (Pinning)

A equação (6.36) mostra que num supercondutor de tipo II ideal a rede de vórtices somente estará em equilíbrio se a super-corrente total for nula na posição dos vórtices. Isto poderá ocorrer se não houver correntes de transporte. Porém, se em adição às correntes de equilíbrio, geradas pela presença de um campo magnético, houver correntes de transporte, os vórtices ficarão sob ação de uma força transversal à direção da corrente. Esta força, tal como mostra a equação (6.36) e a figura 6.9(a), tem origem na força de Lorentz.

No caso de um sistema ideal, no qual a força lateral  $\vec{f}$  não é contrabalançada por algum efeito de aprisionamento nas linhas de fluxo, ocorrerá um movimento de deriva lateral de rede de vórtices, tal como ilustra a figura 6.9(b). Se os vórtices se moverem com uma velocidade de deriva  $v_d$  (supondo meio viscoso) haverá uma força eletromotriz induzida (fem), ou, em outros termos, um campo elétrico induzido dado por

$$\vec{E} = \vec{B} \times \vec{v}_d \quad (6.40)$$

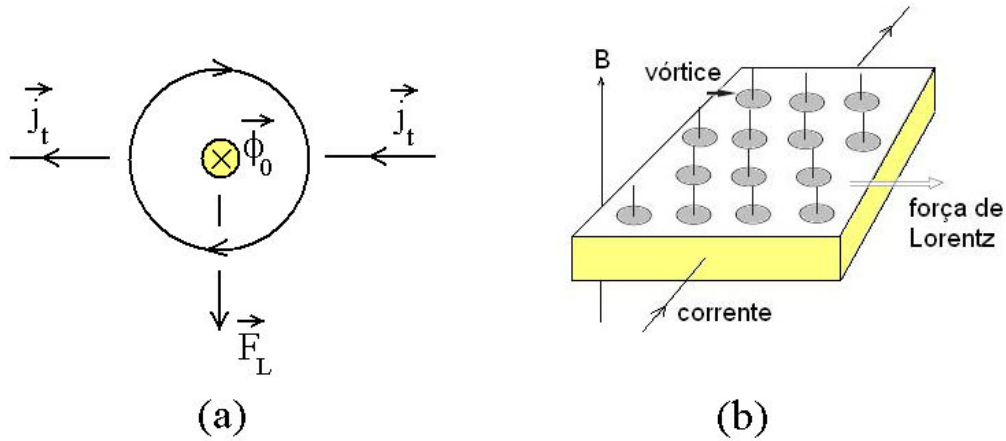


Figura 6.9. (a) Força sobre um vórtice devido ao auto-campo criado pela corrente de transporte  $\vec{j}_t$ . (b) Deriva lateral de vórtices causada pela força de Lorentz.

O campo elétrico induzido é paralelo à direção da corrente de transporte  $\vec{j}_t$ . Este campo atuará de modo análogo a uma voltagem resistiva e haverá dissipação de energia. Nota-se que não se trata de um processo resultante de espalhamento microscópico, como na resistividade de um metal normal. Porém, o efeito é o mesmo, pois a potência transportada pela corrente  $\vec{j}_t$  é dissipada para movimentar lateralmente o sistema de vórtices. Portanto, um supercondutor do tipo II ideal não apresenta resistência nula no estado misto. Assim, os sistemas do tipo II não teriam interesse tecnológico não fosse o fenômeno de aprisionamento dos vórtices por inhomogeneidades do material.

O aprisionamento de vórtices (pinning) resulta de variações locais de  $\xi$ ,  $\lambda$  ou  $H_c$  que são devidas à impurezas, fronteiras de grão, precipitados, poros e outros defeitos que causem variação locais da energia livre por unidade de comprimento de uma linha de fluxo, fazendo que algumas locações para os vórtices sejam favorecidas. A formação de um vórtice exige que o parâmetro de ordem seja localmente anulado, o que penaliza energeticamente o sistema. Portanto os vórtices tenderão a se formar em locais onde o parâmetro de ordem é naturalmente deprimido. A figura 6.10(a) mostra que um vórtice é atraído para a região onde se localiza uma pequena inclusão de material normal.

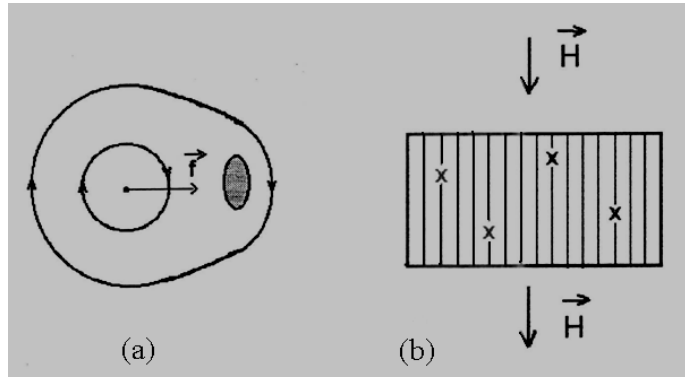


Figura 6.10 (a) *Atração de um vórtice por um pequeno precipitado não-supercondutor.* (b) *Devido às forças de interação entre os vórtices, bastam alguns centros de aprisionamento para imobilizar a rede como um todo.*

As inhomogeneidades mais efetivas para o aprisionamento de vórtices devem ter escala de tamanho da ordem de  $\xi$  ou  $\lambda$ . Defeitos na escala atômica podem não ser efetivas para deprimir significativamente o parâmetro de ordem.

Se o aprisionamento for suficientemente forte, o movimento de deriva dos vórtices pode ser diminuído a níveis indetectáveis e o supercondutor passa a mostrar a propriedade de resistência nula. Assim, os supercondutores de interesse para aplicação práticas são, em geral, sistemas do tipo II extremos, com elevados valores de  $H_{c2}$  e que contenham centros de aprisionamento eficazes. Em geral, estes centros de aprisionamento de vórtices são produzidos artificialmente, por processos químicos ou mecânicos. É importante notar que não é necessário produzir um centro de aprisionamento por linha de fluxo. Devido a interação inter-vórtices, em geral uns poucos centros de aprisionamento bastam para imobilizar a rede como um todo.

### 6.7.2 A Deriva do Fluxo Magnético (Flux-Flow)

Na discussão da seção 6.6.1 deduzimos a expressão da força de Lorentz que atua sobre um determinado vórtice, equação (6.36), a qual depende da densidade de corrente gerada por todos os demais vórtices na posição do vórtice em questão. Se o supercondutor for percorrido por uma corrente de transporte, a equação (6.36) deve ser generalizada como

$$\vec{f} = \vec{j}_T \times \vec{\phi}_0 \quad (6.41)$$

onde  $\vec{j}_T$  é a densidade de corrente total na posição do vórtice, incluindo as correntes de transporte e de blindagem. Nota-se que se a rede de vórtices for

periódica, a contribuição das correntes de blindagem num ponto de rede é nula e  $\vec{j}_T$  na equação (6.41) será essencialmente devido à corrente de transporte.

As forças individuais dadas em (6.41) se somam de modo que a rede como um todo fica sujeita a uma densidade de força ( por unidade de volume ) dada por

$$\begin{aligned}\vec{F} &= \vec{j}_t \times N\vec{\phi}_0 \\ &= \vec{j}_t \times B\end{aligned}\tag{6.42}$$

onde  $N$  é o número de vórtices por unidade de superfície de amostra e  $\vec{j}_t$  é a densidade de corrente de transporte.

A força  $\vec{F}$  atua no sentido de colocar em movimento a rede de vórtices, porém sua ação tende a ser compensada pela densidade de força de aprisionamento  $F_p$ . Se  $F < F_p$ , a rede de vórtices não se move e teremos resistência nula. Porém, se  $F > F_p$ , a rede se moverá e teremos o que se chama de regime de deriva do fluxo magnético (flux flow), o qual é dissipativo. O limite  $F = F_p$  permite que se defina a densidade de corrente crítica,

$$j_c = \frac{F_p}{B}.\tag{6.43}$$

Um supercondutor do tipo II submetido a uma corrente de transporte maior que  $j_c$  se comporta dissipativamente. Note-se que a corrente de transporte crítica definida por (6.43) não está relacionada à destruição do estado supercondutor. De fato, a resistividade que resulta na presença de correntes maiores que  $j_c$  é muito menor que a resistividade normal que o sistema teria se a supercondutividade fosse suprimida.

No regime  $F > F_p$ , o movimento dissipativo da rede de vórtices é dependente da viscosidade do meio. Assim, a força resultante sobre a rede de vórtices pode ser igualado a uma força de atrito,

$$F - F_p = N\eta v_d ,\tag{6.44}$$

onde  $v_d$  é a velocidade de deriva de uma linha de fluxo.

No limite em que a força de Lorentz é muito maior que a força de aprisionamento, das equações (6.42) e (6.44) obtemos que

$$\vec{j}_i \vec{\phi}_0 = \eta \vec{v}_d . \quad (6.45)$$

Este resultado, juntamente com a equação (6.40), permite obter a resistividade no regime de deriva de fluxo, ou seja

$$\rho_F = \frac{E}{j} = \frac{\phi_0}{\eta} B , \quad (6.46)$$

que é linearmente dependente da indução magnética  $B$ . A dependência de  $\rho_F$  com a temperatura é determinada pelo coeficiente de viscosidade  $\eta$ . Um modelo simplificado, devido a Bardeen e Stephen (1965), propõe que

$$\eta \cong \frac{\phi_0 \mu_0 H_{c2}}{\rho_N} , \quad (6.47)$$

onde  $\rho_N$  é a resistividade do estado normal. Assim, o regime de deriva de fluxo é ôhmico e sua resistividade é dada aproximadamente por

$$\rho_F \approx \rho_N \frac{B}{\mu_0 H_{c2}} . \quad (6.48)$$

A figura 6.11 representa, esquematicamente, a característica corrente versus voltagem para um supercondutor no regime de deriva de fluxo comparativamente ao regime normal.

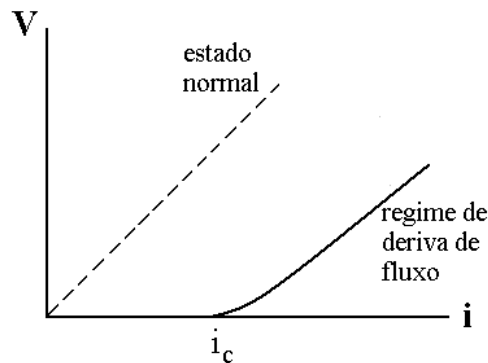


Figura 6.11. Diferença de potencial  $V$  medida através de uma amostra supercondutora percorrida por uma corrente  $i$ . No estado normal, a razão  $V / i$  define a resistência normal da amostra. No regime de deriva de fluxo, que também é ôhmico ( $V$  varia linearmente com  $i$ ), a inclinação da reta depende da razão entre o campo aplicado e o campo crítico inferior.