

IX^a ESCOLA DO CBPF
16 – 27 de Julho de 2012

Curso: SUPERCONDUTIVIDADE: uma introdução

Prof.: Paulo Pureur

Texto correspondente à 3^a Aula (19/07/2012)
Capítulo 3.

Capítulo 3.

TEORIA DE GINZBURG - LANDAU

3.1. INTRODUÇÃO

A mais bem sucedida descrição macroscópica de supercondutividade foi introduzida por Vitaly Ginzburg e Lev Landau em 1950. Esta descrição, que é chamada de teoria Ginzburg-Landau, ou simplesmente teoria G-L, deriva da descrição proposta por Landau para as transições de fase de segunda ordem. O modelo de Landau se fundamenta na hipótese da existência de uma variável termodinâmica, denominada parâmetro de ordem, que caracteriza o estado ordenado de baixas temperaturas. O parâmetro de ordem tende a zero continuamente quando a temperatura cresce e se aproxima da temperatura crítica. Trata-se de uma descrição do tipo campo-médio que produz resultados muito bons no caso da transição supercondutora.

A teoria G-L foi desenvolvida antes da teoria microscópica. Porém, L. Gorkov (1959) demonstrou que, em certos limites de temperatura e campo magnético, as equações da teoria G-L podem ser derivadas a partir da teoria microscópica. Como veremos, a teoria G-L tem grande valor preditivo e é particularmente útil ao relacionar os comprimentos característicos (comprimento de penetração e comprimento de coerência) com as diversas propriedades do estado supercondutor.

3.2. O PARÂMETRO DE ORDEM SUPERCONDUTOR

O aspecto central da teoria G-L é a noção de parâmetro de ordem supercondutor. Este conceito tem origem na proposta da teoria de London que consiste em caracterizar o estado supercondutor como um estado quântico macroscópico, no qual a densidade de superpartículas, n_s , está associada ao comprimento de penetração, tal como expresso pela equação (2.12). Ginzburg e Landau generalizaram esta noção introduzindo um parâmetro de ordem complexo, $\psi(\vec{r})$, tal que $|\psi(\vec{r})|^2$ representa a densidade local de superpartículas; ou seja

$$|\psi(\vec{r})|^2 = n_s(\vec{r}) \quad (3.1)$$

Portanto, de acordo com a equação (2.12), $\psi(\vec{r})$ deve decrescer continuamente a zero quando a temperatura cresce e se aproxima de T_c , onde λ_L se torna infinito. Além de depender da posição e da temperatura, $\psi(\vec{r})$ também deve variar em resposta a campos eletromagnéticos aplicados.

Embora, rigorosamente, $\psi(\vec{r})$ deva ser tratado como um parâmetro de ordem (tal como, por exemplo, o é a magnetização de um sistema ferromagnético) esta quantidade se apresenta, em certos aspectos, como uma “*pseudo função de onda*”, ou uma “*função de onda macroscópica*” para os elétrons supercondutores. Os trabalhos de Gorkov contribuíram para o desenvolvimento desta interpretação, pois $\psi(\vec{r})$ pode ser relacionada, em certa medida, à (verdadeira) função de onda de um par de Cooper. Como todos os pares de Cooper condensam no mesmo estado, que assume dimensão macroscópica, uma única função de onda é suficiente para descrevê-los em conjunto.

3.3. A ENERGIA LIVRE G-L NA AUSÊNCIA DE CAMPO MAGNÉTICO

3.3.1. A Expressão da Energia Livre

As variações de $\psi(\vec{r})$ são determinadas pela minimização da energia livre de Helmholtz, cuja expressão é a versão supercondutora da expansão em série de potências do parâmetro de ordem da teoria de Landau para as transições de fase de segunda ordem. Empregando a notação usual, na ausência de campos magnéticos aplicados a densidade de energia livre G-L é escrita como

$$f_S(|\psi|, T) = f_N(T) + \alpha(T)|\psi|^2 + \frac{\beta}{2}|\psi|^4 + \gamma|\nabla\psi|^2, \quad (3.2)$$

onde $f_N(T)$ refere-se ao estado normal e α, β, γ são parâmetros fenomenológicos. Esta expressão se justifica em situações em que $|\psi|$ é pequeno, como nas vizinhanças da temperatura crítica. Nestas circunstâncias é aceitável o desenvolvimento da expressão para a energia livre numa série de potências em $|\psi|^2$, com a retenção, apenas, dos termos de mais baixa ordem. Na expansão deve-se excluir o termo proporcional a $|\psi|$, pois este impediria que o estado com parâmetro de ordem nulo (fase normal) seja um estado de equilíbrio. O termo cúbico no módulo do parâmetro de ordem é relevante na descrição de transições de

fase de 1a. ordem, o que não é o caso da transição supercondutora discutida aqui. Por outro lado, a introdução do termo proporcional a $|\nabla\psi|^2$ visa refletir a penalização em energia livre causada pela variação espacial de $\psi(\vec{r})$. Observamos que f não deve depender de $\nabla\psi$ se estivermos tratando de sistemas isotrópicos. Notamos também que a inclusão de um termo em $\nabla^2\psi$, que seria de mesma ordem que o terceiro termo em (3.2), é de fato supérflua, pois numa integração em volume da densidade de energia livre,

$$F_S(|\psi|, T) = \int f_s(|\psi|, T) dr^3, \quad (3.3)$$

um tal termo se tornaria, pelo teorema da divergência, num termo de superfície somado a um termo proporcional a $|\nabla\psi|^2$, o qual já está incluído na expressão (3.2). Para sistemas suficientemente grandes, as contribuições de superfície para a energia livre F_S podem ser desprezadas.

3.3.2. Propriedades de Equilíbrio

Consideremos inicialmente o caso de um sistema homogêneo em que não haja gradientes do parâmetro de ordem. O estado de equilíbrio é então dado pela minimização da densidade de energia livre, que é obtida de

$$\frac{\partial f_s}{\partial |\psi|} = 2\alpha|\psi| + 2\beta|\psi|^3 = 0 \quad (3.4)$$

As soluções são

$$|\psi|^2 = 0 \quad \text{e} \quad |\psi|^2 = -\alpha/\beta \quad (3.5)$$

O tipo de solução que procuramos é a que fornece $\psi = 0$ para $T > T_c$ e $\psi \neq 0$ para $T < T_c$. Então, $(-\alpha/\beta)$ deve ser positivo abaixo de T_c , nulo em $T = T_c$ e negativo (não-físico) acima de T_c . Em regra, supõe-se que β é uma constante positiva. Portanto, é necessário que $\alpha(T)$ mude de sinal em T_c . Acima de T_c , α deve ser positivo para que o mínimo de f_s ocorra em $|\psi|^2 = 0$, o que corresponde ao estado normal. Abaixo de T_c , α deve ser negativo para que uma solução com $|\psi|^2 \neq 0$ favoreça a energia livre do estado supercondutor em relação

à do estado normal. Fazendo uma expansão de $\alpha(T)$ em torno de T_c e conservando apenas o termo de mais baixa ordem, obtemos

$$\alpha(T) = \alpha_0(T - T_c) \quad . \quad (3.6)$$

Desta forma, na ausência de gradientes, a expansão (4.2) pode ser escrita como

$$f_S - f_N = \alpha_0(T - T_c)|\psi|^2 + \frac{\beta}{2}|\psi|^4 \quad , \quad (3.7)$$

e seu comportamento acima e abaixo de T_c está esquematizado na figura 4.1.

Os estados de equilíbrio serão $\psi_0 = 0$ para $T > T_c$ e $|\psi|^2 = \psi_0^2 = -(\alpha_0 / \beta)(T - T_c)$ para $T < T_c$. Correlacionando este resultado com a densidade de superpartículas da teoria de London através da equação (3.1), notamos que o comprimento de penetração diverge em T_c de acordo com

$$\lambda_L \approx (T_c - T)^{-1/2} \quad . \quad (3.8)$$

As densidades de energia livre de equilíbrio serão

$$f_S = f_N \quad (T > T_c) \quad (3.9.a)$$

e

$$\begin{aligned} f_S &= f_N + \alpha_0(T - T_c) \left[-\frac{\alpha_0}{\beta}(T - T_c) \right] + \frac{\beta}{2} \left[-\frac{\alpha_0}{\beta}(T - T_c) \right]^2 \\ &= f_N - \frac{\alpha_0^2}{2\beta}(T - T_c)^2 \quad (T < T_c) \quad . \end{aligned} \quad (3.9.b)$$

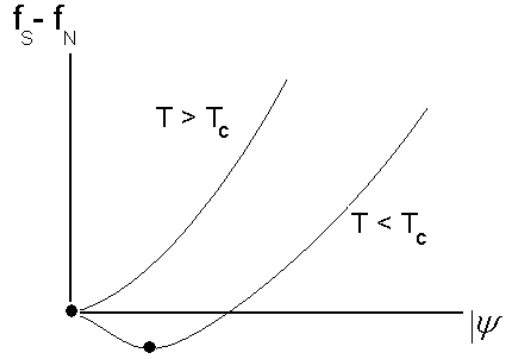


Figura 3.1: Densidade de energia livre G-L do estado supercondutor referida à energia livre do estado normal. Os pontos indicam as posições de equilíbrio $|\psi_0| = 0$ no estado normal e $|\psi_0| = (\alpha_0/\beta)(T - T_c)^{1/2}$ no estado supercondutor.

A diferença entre as densidades de energia livre no estado normal e no estado supercondutor permite estimar o campo crítico H_c . Quando o campo atinge este valor, a energia livre ganha pelo sistema através do processo eletrônico de condensação ao estado supercondutor estará exatamente compensada. Então, usando a equação (3.9.b) podemos escrever

$$f_N - f_S = \frac{\alpha_0^2}{2\beta}(T - T_c)^2 = \frac{1}{2}\mu_0 H_{ct}^2, \quad (3.10)$$

onde a notação H_{ct} é usada para expressar o campo crítico termodinâmico, que no caso dos supercondutores do tipo I é idêntico a H_c . Nos sistemas do tipo II, H_{ct} também pode ser definido através da equação (3.10), mas não corresponde a H_{c1} nem a H_{c2} .

De acordo com a equação (3.9.b), a diferença entre as densidades de entropia será

$$s_S - s_N = -\frac{\alpha_0^2}{\beta}(T_c - T), \quad (3.11)$$

o que significa que a existência de um parâmetro de ordem não-nulo no estado supercondutor efetivamente produz uma diminuição na entropia do sistema. Observa-se também que não ocorre descontinuidade na entropia em $T = T_c$. Portanto, não há calor latente e a transição é de 2a. ordem. No entanto, o calor

específico mostrará uma descontinuidade em $T = T_c$, pois da equação (3.11), deduzimos

$$[c_S - c_N]_{T=T_c} = \frac{\alpha_0^2}{\beta} T_c . \quad (3.12)$$

Na figura 3.2 são mostradas a densidade de energia livre, a entropia e o calor específico nas proximidades de T_c , tal como previsto pela teoria G-L.

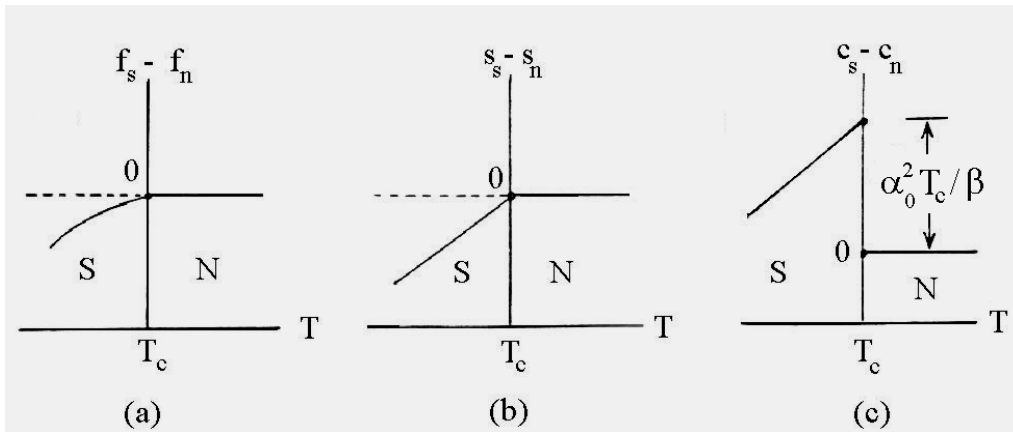


Figura 3.2: Densidade de energia livre(a), entropia(b) e calor específico(c) nas proximidades de T_c segundo a teoria G-L.

3.3.3. Parâmetro de Ordem Dependente de Posição: Comprimento de Coerência

Reconsideremos a densidade de energia livre dada pela equação (3.2) e suponhamos que o parâmetro de ordem $\psi(r)$ efetivamente dependa da posição. Assim como β , o coeficiente γ da equação (3.2) pode ser tomado como uma constante positiva, pois haverá um custo energético para fazer o parâmetro de ordem variar ao longo da amostra. Num verdadeiro “tour de force” de intuição física, Ginzburg-Landau propuseram que

$$\gamma = \frac{\hbar^2}{2m^*} \quad (3.13)$$

onde m^* é a massa das superpartículas. A justificativa da escolha representada pela igualdade (3.13) foi feita por Gorkov, em 1959, ao demonstrar a fundamentação da teoria G-L a partir da teoria microscópica.

A condição de estabilidade da teoria G-L deriva da minimização da energia livre (3.2) em relação ao parâmetro de ordem, tal como se havia feito no caso simples da equação (3.4). Se fizermos

$$\frac{\partial F}{\partial \psi^*} = \frac{\partial}{\partial \psi^*} \int f_S d^3r = 0 \quad , \quad (3.14)$$

obtemos a equação:

$$-\frac{\hbar^2}{2m^*} \nabla^2 \psi + \beta |\psi|^2 \psi = -\alpha \psi \quad , \quad (3.15)$$

a qual lembra a equação de Schrödinger, na qual o parâmetro de ordem desempenha o papel de função de onda. Por esta razão, ψ é também chamada de função de onda macroscópica, ou pseudo-função de onda. Devemos, no entanto, atentar para o fato de que a expressão (3.15) representa uma equação diferencial de 2a. ordem não-linear, pois o termo que desempenha o papel de potencial, $\beta |\psi|^2$, depende da solução. Portanto, não é válido o princípio de superposição para ψ . Ademais, ψ não é normalizável, pois $|\psi|^2$ não é uma distribuição de probabilidade. Assim, estritamente, $\psi(\vec{r})$ é uma variável termodinâmica que rotula os possíveis estados de equilíbrio do sistema e suas energias livres.

A equação (3.15) pode ser reescrita como

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m^* \alpha} \nabla^2 + \frac{\beta}{\alpha} |\psi|^2 + 1 \right) \psi = 0 \quad , \quad (3.16)$$

a qual mostra que a quantidade $(-\hbar^2 / 2m^* \alpha)$ possui a dimensão de um comprimento ao quadrado. Para interpretar o significado físico deste comprimento suponhamos que o parâmetro de ordem possa ser escrito como $\psi = \psi_0 f$, onde $\psi_0^2 = -\alpha / \beta$ e f é real. Tratando o problema em uma dimensão, a equação (3.16) se torna

$$\frac{\hbar^2}{2m^* |\alpha|} \frac{d^2 f}{dx^2} - f^3 + f = 0 \quad , \quad (3.17)$$

a qual mostra que a escala natural para a variação de f é o comprimento

$$\xi(T) = \left(\frac{\hbar^2}{2m^*|\alpha|} \right)^{1/2}. \quad (3.18)$$

Este comprimento característico é chamado de “comprimento de coerência G-L”. Observamos que $\xi(T)$ não é o mesmo comprimento de coerência de Pippard, ξ_0 , definido pela equação (2.27). De fato, ξ_0 é essencialmente constante com a temperatura, ao passo que, segundo a equação (3.18), notamos que $\xi(T)$ diverge em $T = T_c$ como

$$\xi(T) \sim (T_c - T)^{-1/2} \quad (3.19)$$

Em temperaturas próximas ao zero absoluto pode-se mostrar, com o auxílio da teoria microscópica, que $\xi \approx \xi_0$, onde ξ_0 é da ordem do comprimento de coerência de Pippard.

Em termos de $\xi(T)$, a equação (3.17) toma a forma

$$\xi^2(T) \frac{d^2 f}{dx^2} - f^3 + f = 0. \quad (3.20)$$

Supondo que $f(x) = 1 + \phi(x)$, onde $\phi(x) \ll 1$, obtemos uma forma linearizada da equação (3.20), ou seja,

$$\xi^2 \frac{d^2 \phi}{dx^2} - (1 + 3\phi + \dots) + (1 + \phi) = 0$$

ou ainda,

$$\frac{d^2 \phi}{dx^2} - \frac{2\phi}{\xi^2} = 0,$$

cujas solução é

$$\phi(x) \sim e^{\pm \sqrt{2} \frac{x}{\xi}}. \quad (3.21)$$

A equação (3.21) mostra que um pequeno distúrbio no parâmetro de ordem decai num comprimento característico da ordem de $\xi(T)$, o qual fornece a escala típica de variação espacial do parâmetro de ordem.

3.4. A ENERGIA LIVRE G-L NA PRESENÇA DE CAMPO MAGNÉTICO

3.4.1. A Expressão da Energia Livre na Presença de Campo

As modificações na equação (3.2) para a densidade de energia livre G-L devido à presença de um campo magnético devem ser feitas com cuidado, pois a indução magnética local $\vec{B}_{mic}(\vec{r})$ deve ser considerada como a soma do campo aplicado com a magnetização produzida pelas supercorrentes \vec{j}_s . Ademais, a presença de um campo magnético implica na substituição

$$\frac{\hbar}{i}\nabla \rightarrow \frac{\hbar}{i}\nabla - e^*\vec{A}, \quad (3.22)$$

e deve-se cuidar para que a teoria seja invariante frente a uma transformação de calibre no potencial vetor.

Desta forma, a densidade de energia livre (3.2), na presença de campo magnético, deve ser escrita como:

$$f_s(|\psi\rangle, T, \vec{h}) = f_N(T) + \alpha|\psi|^2 + \frac{\beta}{2}|\psi|^4 + \frac{1}{2m^*} \left| \left(\frac{\hbar}{i}\nabla - e^*\vec{A} \right) \psi \right|^2 + \frac{1}{2}\mu_0\vec{h}^2(\vec{r}). \quad (3.23)$$

Podemos tornar mais transparente o efeito do campo magnético na densidade de energia livre escrevendo o parâmetro de ordem (complexo) como

$$\psi(\vec{r}) = |\psi(\vec{r})| e^{i\theta(\vec{r})}. \quad (3.24)$$

Então, o termo que envolve o gradiente e o potencial vetor em (3.23) torna-se

$$\frac{1}{2m^*} \left| \left(\frac{\hbar}{i}\nabla - e^*\vec{A} \right) \psi \right|^2 = \frac{1}{2m^*} \left[\hbar^2(\nabla|\psi|)^2 + (\hbar\nabla\theta - e^*\vec{A})^2|\psi|^2 \right]. \quad (3.25)$$

O termo entre parênteses no segundo membro da igualdade acima fornece a energia associada com a variação espacial do parâmetro de ordem na presença do campo, e pode ser interpretado como a energia cinética das superpartículas, pois

$$\frac{1}{2}m^* \vec{v}_s^2 = \frac{1}{2m^*}(\vec{p}_s - e^* \vec{A})^2 \quad (3.26)$$

3.4.2. As Equações de Ginzburg-Landau

A equação (3.15) é a primeira equação G-L na ausência de campo aplicado e é obtida da minimização da energia livre G-L em relação à variação do parâmetro de ordem. Na presença de campo, a equação (3.15) é modificada simplesmente aplicando-se a transformação quanto-mecânica expressa pela equação (3.22).

Assim,

$$\frac{1}{2m^*} \left(\frac{\hbar}{i} \nabla - e^* \vec{A} \right)^2 \psi + \beta |\psi|^2 \psi = -\alpha \psi \quad (3.27)$$

é a forma completa da 1ª equação G-L, que descreve a variação de $\psi(r)$ no interior de uma amostra supercondutora, uma vez conhecido o potencial vetor \vec{A} . Esta equação deve ser suplementada com condições de contorno apropriadas para ψ , as quais em geral são relacionadas ao valor, ou à variação, do parâmetro de ordem na superfície da amostra.

A segunda equação G-L é obtida da minimização da energia livre com relação às variações de \vec{A} e fornece a densidade de super-corrente,

$$\vec{j}_s = \frac{e^* \hbar}{2m^* i} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) - \frac{e^{*2}}{m^*} |\psi|^2 \vec{A} \quad (3.28)$$

As equações (3.27) e (3.28) são as célebres equações de Ginzburg-Landau, que formam um sistema de duas equações diferenciais acopladas que devem ser resolvidas simultaneamente. A primeira equação assemelha-se formalmente à equação de Schrödinger e fornece o parâmetro de ordem. A segunda equação fornece as correntes, ou seja a resposta diamagnética do supercondutor frente à aplicação do campo magnético. A equação (3.28) é idêntica à expressão quanto-mecânica usual para a densidade de corrente associada à partículas de carga e^* , massa m^* e função de onda $\psi(\vec{r})$ na presença de um campo eletromagnético representado pelo potencial vetor \vec{A} . Enquanto a 1ª equação está associada ao comprimento de coerência, a 2ª equação, como veremos na próxima secção, está associada ao comprimento de penetração de London.

3.4.3. A Obtenção da Equação de London

A equação (3.28) expressa uma resposta eletrodinâmica de natureza local: $\vec{j}_s(\vec{r})$ depende dos valores de ψ , $\nabla\psi$ e \vec{A} no ponto \vec{r} . Suponhamos que o parâmetro de ordem $\psi(\vec{r})$, dado pela expressão (3.24), tenha amplitude constante e dependa da posição apenas através de uma fase $\theta(\vec{r})$. Nestas circunstâncias, a equação (3.28) toma a forma

$$\vec{j}_s = \left(\frac{e^* \hbar}{m^*} \nabla \theta - \frac{e^{*2}}{m^*} \vec{A} \right) |\psi|^2 . \quad (3.29)$$

Aplicando o operador rotacional a ambos os membros da equação acima e lembrando que o rotacional de um gradiente é nulo, obtemos

$$\nabla \times \vec{j}_s = -\frac{e^{*2}}{m^*} |\psi|^2 \nabla \times \vec{A} , \quad (3.30)$$

que reproduz a equação de London (2.9) se interpretamos $|\psi|^2$ como a densidade local de superpartículas, tal como expresso pela equação (3.1). É, portanto, evidente que o comprimento de penetração de London está associado à 2ª equação G-L. Em particular, no calibre de London, a equação (3.29) deve se reduzir à equação (2.19). Isto significa que, nesta aproximação, tanto a amplitude quanto a fase do parâmetro de ordem são independentes da posição.

3.5. OS PARÂMETROS DA TEORIA G-L

É possível estimar os parâmetros característicos da teoria de Ginzburg-Landau a partir de quantidades determináveis experimentalmente. Assim, lembrando a definição do comprimento de penetração de London, dada pela equação (2.12), podemos escrever

$$|\psi(\vec{r})|^2 = \frac{m^*}{\lambda_L^2 \mu_0 e^{*2}} , \quad (3.31)$$

já que identificamos a densidade de superpartícula n_s com o módulo quadrado do parâmetro de ordem. Lembrando também que $|\psi|^2 = -\alpha/\beta$, tal como expresso pela equação (3.5), e que obtemos $\alpha^2(T)/\beta = \mu_0 H_{ct}^2$ da equação (3.10), podemos calcular

$$\alpha(T) = -\frac{\mu_0^2 e^{*2}}{m^*} H_{ct}^2(T) \lambda_L^2(T) . \quad (3.32)$$

Fazendo considerações similares, obtemos

$$\beta(T) = \mu_0^3 \left(\frac{e^{*2}}{m^*} \right)^2 H_{ct}^2(T) \lambda_L^4(T) \quad (3.33)$$

Com o auxílio da equação (3.32) podemos também reescrever a expressão (3.18) para o comprimento de coerência, obtendo

$$\xi(T) = \frac{\hbar}{\sqrt{2} \mu_0 e^* H_{ct}(T) \lambda_L(T)} . \quad (3.34)$$

Este resultado é geralmente expresso em termos do quantum de fluxo magnético para os supercondutores,

$$\phi_0 = \frac{\hbar}{e^*} = \frac{h}{2e} . \quad (3.35)$$

Então, reescrevemos o comprimento de coerência (3.34) como

$$\xi(T) = \frac{\phi_0}{2\sqrt{2} \pi \mu_0 H_{ct}(T) \lambda_L(T)} . \quad (3.36)$$

Esta equação expressa uma interessante relação entre os dois comprimentos característicos do estado supercondutor e o campo crítico termodinâmico, ou seja

$$H_{ct}(T) \xi(T) \lambda_L(T) = \frac{\phi_0}{2\sqrt{2} \pi \mu_0} = cte . \quad (3.37)$$

Como veremos posteriormente, é também útil a introdução do (célebre) parâmetro de Ginzburg-Landau, κ , que é definido como a razão dos dois comprimentos característicos,

$$\kappa = \frac{\lambda_L(T)}{\xi(T)} . \quad (3.38)$$

As equações (3.8) e (3.19) mostram que os comprimentos de penetração e de coerência divergem da mesma forma em $T = T_c$. Portanto, espera-se, teoricamente, que o parâmetro κ não apresente qualquer anomalia em T_c . De fato, verifica-se experimentalmente que κ depende muito fracamente da temperatura e, para a maioria dos efeitos práticos, pode ser considerado como uma constante.

4.6. EXEMPLO DE APLICAÇÃO DA TEORIA G-L: A QUANTIZAÇÃO DO FLUXO MAGNÉTICO NUM ANEL SUPERCONDUTOR

Para ilustrar a aplicação das equações G-L num exemplo concreto, escolhamos um caso simples em que a amplitude do parâmetro de ordem não varia com a posição na amostra. Esta aplicação mostra que o fluxo magnético através de um supercondutor multiplamente conectado deve ser quantizado.

Consideremos uma amostra na forma de um anel que é submetida a um campo magnético, tal como representa a figura 3.4(a). Tracemos, então, uma trajetória fechada imaginária no interior do anel que esteja suficientemente afastada da superfície, de modo que não fluam correntes nesta região.

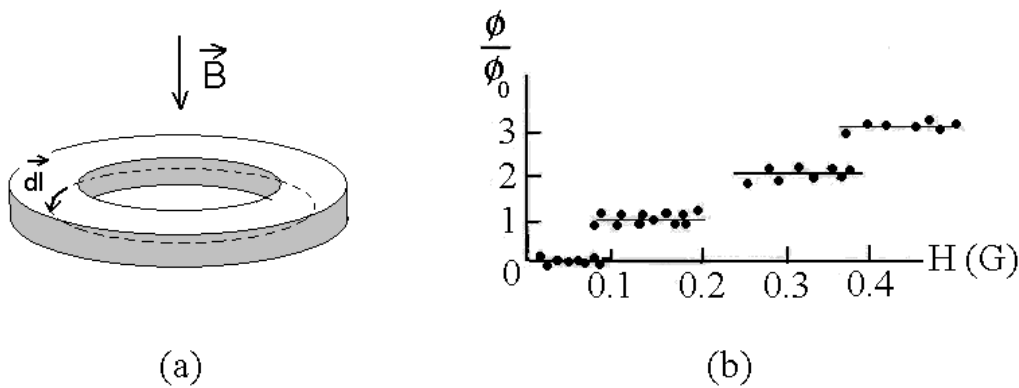


Figura 3.3: Anel supercondutor na presença de um campo magnético. A trajetória fechada, que é representada em linha pontilhada, está no interior do anel, afastada das superfícies, de modo que a densidade de corrente seja nula nesta região. (b) Fluxo magnético aprisionado num anel de estanho, segundo Deaver e Fairbank (1961).

Supondo que o parâmetro de ordem tenha amplitude constante ao longo do trajeto fechado e que dependa da posição apenas através da sua fase $\theta(\vec{r})$, podemos escrever

$$\oint \vec{j}_s \cdot d\vec{l} = \oint \left(\frac{e^* \hbar}{m^*} \nabla \theta - \frac{e^{*2}}{m^*} \vec{A} \right) \cdot d\vec{l} = 0 \quad , \quad (3.39)$$

onde usamos a equação (3.29), e $d\vec{l}$ representa um elemento infinitesimal do caminho fechado.

O teorema de Stokes ,

$$\oint \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int (\nabla \times \vec{A}) \cdot d\vec{S} = \int \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (3.40)$$

mostra que a integral de linha do potencial vetor ao longo da trajetória fechada é igual ao fluxo magnético Φ através da área delimitada pelo anel.

Por outro lado, a fase do parâmetro de ordem deve se alterar de uma quantidade igual a $2\pi n$ ($n =$ inteiro) ao completar um ciclo ao longo do trajeto fechado, pois $\psi(\vec{r})$ deve ser univocamente definido. Isto significa que

$$\oint \nabla \theta \cdot d\vec{l} = \Delta \theta = 2\pi n \quad . \quad (3.41)$$

Substituindo (3.40) e (3.41) em (3.39), obtemos que o fluxo magnético através do anel supercondutor deve ser quantizado como

$$\Phi = n \frac{h}{e^*} = n \frac{h}{2e} = n \phi_0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad , \quad (3.42)$$

onde ϕ_0 é o quantum de fluxo para o estado supercondutor definido na equação (4.35) e cujo valor em unidades SI é $\phi_0 \approx 2.10^{-15} \text{ T m}^2$.

A observação experimental da quantização do fluxo magnético num anel supercondutor, tal como está representada na figura 3.3(b), constitui-se numa evidência direta e contundente da natureza quântica-macroscópica do estado supercondutor. Ademais, o valor do quantum de fluxo demonstra que a carga da superpartícula é efetivamente igual a duas vezes a carga do elétron.