IX$^{a.}$ ESCOLA DO CBPF
16 – 27 de Julho de 2012

Curso: SUPERCONDUTIVIDADE: uma introdução

Prof.: Paulo Pureur

Texto correspondente à 2$^{a.}$ Aula (17/07/2012)

Capítulo 2.

ELETRODINÂMICA DE LONDON

2.1. A TEORIA DE LONDON

2.1.1. As Equações de London

Os irmãos Fritz e Hans London propuseram em 1935 uma teoria quantitativa que permite descrever o efeito Meissner. Sua teoria baseia-se num modelo de dois fluidos, o qual supõe que uma fração dos elétrons num material supercondutor comporta-se de forma normal, ao passo que os elétrons restantes exibem um comportamento anômalo e são responsáveis pelas propriedades supercondutoras. Em outros termos, os irmãos London consideraram que uma fração n_s da densidade total de elétrons é constituída de super-elétrons. Estas partículas supercondutoras não estão sujeitas à lei de Ohm e, quando submetidas a um campo elétrico, são aceleradas, sem dissipação, de acordo com a equação de movimento,

$$m^* \frac{d\vec{v}_s}{dt} = e^* \vec{E} \ , \tag{2.1}$$

onde m^*, e^* e $\vec{v}_s$ são respectivamente a massa, a carga e a velocidade dos portadores de carga supercondutores. Sabemos hoje, da teoria microscópica da supercondutividade, que m^* e e^* são, respectivamente, a massa e a carga de um par de Cooper, ou seja $m^* = 2m$ e $e^* = 2e$, onde m e e são a massa e a carga do elétron. A densidade de corrente associada às super-partículas é, então, dada por

$$\vec{j}_s = n_s e^* \vec{v}_s \ , \tag{2.2}$$

e obedece à seguinte equação:

$$\frac{d\vec{j}_s}{dt} = \frac{n_s e^{*2}}{m^*} \vec{E} \ . \tag{2.3}$$

Esta equação é, por vezes, denominada de 1ª. equação de London. Aplicando o rotacional a ambos os lados da equação (2.3),

$$\frac{d}{dt}(\nabla \times \vec{j}_s) = \frac{n_s\, e^{*2}}{m^*}\nabla \times \vec{E} \quad , \tag{2.4}$$

e usando a lei de Faraday,

$$\nabla \times \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{h}}{\partial t} \quad , \tag{2.5}$$

obtemos:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \vec{j}_s + n_s \frac{\mu_0 e^{*2^{*}}}{m^*}\vec{h}) = 0 \quad . \tag{2.6}$$

Nas equações acima, a indução magnética microscópica e local foi representada como $\vec{B}_{mic} = \mu_0 \vec{h}$. Esta notação é usual na teoria da supercondutividade e tem como objetivo ressaltar o fato de que a indução magnética varia rapidamente com a posição no interior de um material supercondutor. Juntando a equação (2.6) com a lei de Ampère,

$$\nabla \times \vec{h} = \vec{j}_s \tag{2.7}$$

obtém-se as condições que determinam os campos magnéticos e densidades de corrente num condutor perfeito. Estas condições são compatíveis com $\vec{h}$ arbitrário desde que independente do tempo, pois das equações (2.6) e (2.7) observamos que

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \nabla \times \vec{h} + n_s \frac{\mu_0 e^{*2}}{m^*}\vec{h}) = 0 \, . \tag{2.8}$$

Este resultado, no entanto, não é satisfatório para descrever o efeito Meissner. Assim, é necessário restringir as soluções da equação (2.6) [ou (2.8)] somente àquelas em que, não apenas a derivada temporal, mas a própria expressão entre parênteses seja nula, isto é,

$$\nabla \times \vec{j}_s + n_s \frac{\mu_0 e^{*2}}{m^*}\vec{h} = 0 \quad . \tag{2.9}$$

Esta é a mais famosa das equações da teoria de London, e que caracteriza a eletrodinâmica dos supercondutores, diferenciando-os de hipotéticos condutores perfeitos. A escolha da solução representada pela equação (2.9) (também chamada de 2ª. equação de London) justifica-se simplesmente porque ela conduz ao efeito Meissner. De fato, esta equação faz com que seja nula a expressão entre parênteses na equação (2.8) , ou seja,

$$\nabla^2 \vec{h} - \nabla \cdot (\nabla \cdot \vec{h}) - n_s \frac{\mu_0 e^{*2}}{m^*} \vec{h} = 0 \ . \qquad (2.10)$$

onde foi usada a igualdade $\nabla \times \nabla \times \vec{h} = -\nabla^2 \vec{h} + \nabla.(\nabla.\vec{h})$. Como o divergente de $\vec{h}$ é nulo pela lei de Gauss do magnetismo, a equação (2.10) é simplificada como

$$\nabla^2 \vec{h} = \frac{1}{\lambda_L^2} \vec{h} \ , \qquad (2.11)$$

onde

$$\lambda_L = \left(\frac{m^*}{n_s \mu_0 \ e^{*2}} \right)^{\frac{1}{2}} \qquad (2.12)$$

é chamado de comprimento de penetração de London, o qual se constitui num dos parâmetros característicos mais importantes do estado supercondutor

2.1.2. Penetração do Campo Magnético

As soluções da equação (2.11) mostram que a indução magnética decai exponencialmente na medida em que penetra no supercondutor. Para exemplificar, suponhamos que o campo magnético seja aplicado paralelamente a uma superfície plana e infinita de uma amostra cujo fator desmagnetizante é nulo. Suponhamos também que $\vec{h}$ aponte na direção *z* e a penetração ocorra na direção *x*. Neste caso, o problema é efetivamente unidimensional e a equação (2.11) é simplificada como

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = \frac{1}{\lambda_L^2} h \ . \qquad (2.13)$$

A solução fisicamente aceitável desta equação é

$$h = h_a e^{-\frac{x}{\lambda_L}} \ , \qquad (2.14)$$

onde $\mu_0 h_a$ é o valor de indução magnética no exterior da amostra. A solução (2.14) é representada na figura 2.1 e mostra claramente que o comprimento de penetração é uma medida da extensão em que a indução magnética penetra na amostra supercondutora. Em temperaturas bem inferiores a T_c, observa-se experimentalmente que o comprimento λ_L alcança valores que variam entre algumas dezenas e poucas centenas de nanômetros. No entanto, como $\lambda_L \sim n_s^{-1/2}$, a teoria permite antever que o comprimento de penetração diverge para infinito quando T tende para T_c. Este comportamento é, de fato, observado.

A partir da equação (2.9) e usando a lei de Ampère, equação (2.7), é simples demonstrar que

$$\nabla^2 \vec{j}_s + \frac{1}{\lambda_L^2} \vec{j}_s = 0 \ , \qquad (2.15)$$

o que permite afirmar que as correntes de blindagem também se limitam a uma fina camada superficial do supercondutor, cuja espessura é da ordem de λ_L.

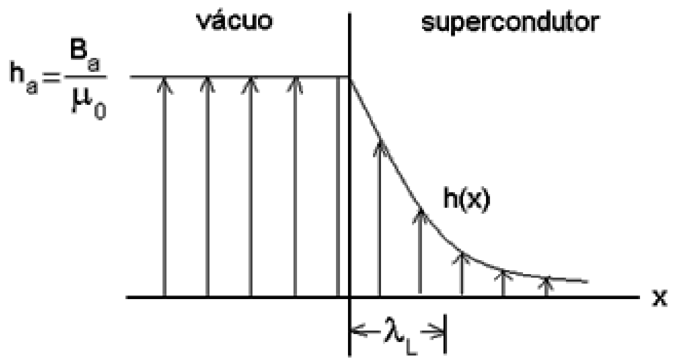

Figura 2.1: *Penetração de campo magnético no interior de um supercondutor.*

Na concepção do modelo de dois fluidos, a densidade de corrente total no material é a soma da contribuição normal e da super-corrente, isto é,

$$\vec{j} = \vec{j}_N + \vec{j}_s \qquad (2.16)$$

A corrente normal obedece apenas às equações de Maxwell e à lei de Ohm,

$$\vec{j}_N = \sigma \vec{E} \ , \qquad (2.17)$$

onde σ é a condutividade elétrica. Porém, como as duas correntes conduzem em paralelo, em condições de estado estacionário (no qual os campos e correntes não variam no tempo) a super-corrente curto-circuita a corrente normal.

2.1.3 As Equações de London e o Potencial Vetor

As equações de London (2.3) e (2.9) podem ser escritas como

$$\frac{d\vec{j}_s}{dt} = \frac{1}{\mu_0 \lambda_L^2}\vec{E} \tag{2.15a}$$

e

$$\nabla \times \vec{j}_S = -\frac{1}{\lambda_L^2}\vec{h} \tag{2.15b}$$

Estas duas equações governam o campo elétrico e o campo magnético microscópico no interior de um supercondutor. É importante notar que as equações de London não substituem as equações de Maxwell, que continuam válidas. As equações (2.15) são condições adicionais que efetivamente governam a eletrodinâmica dos supercondutores e a tornam distinta daquela dos condutores normais, mesmo hipoteticamente perfeitos.

Podemos também escrever as equações de London em termos do potencial vetor $\vec{A}$. Da definição

$$\vec{B}_{mic} \equiv \mu_0 \vec{h} = \nabla \times \vec{A} \tag{2.18}$$

e usando a equação (2.15.b) obtemos a seguinte expressão:

$$\vec{j}_S = -\frac{1}{\mu_0 \lambda_L^2}\vec{A}\,. \tag{2.19}$$

Esta equação desempenha um papel análogo à lei de Ohm e representa, de forma compacta, as duas equações (2.15). Se derivarmos em relação ao tempo os dois membros da equação (2.19), obtemos

$$\frac{\partial \vec{j}_s}{\partial t} = -\frac{1}{\mu_0 \lambda_L^2}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\quad . \tag{2.20}$$

Usando a lei de Faraday e a definição (2.18) temos

$$\nabla \times \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{h}}{\partial t} = -\nabla \times \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \ , \qquad (2.21)$$

de onde resulta

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad . \qquad (2.22)$$

Substituindo este resultado em (2.20), obtemos a equação (2.15a).

Por outro lado, se aplicarmos o rotacional a ambos os membros da equação (2.19), re-obteremos a equação (2.15.b).

Portanto, a equação (2.19) condensa, de forma muito conveniente e sugestiva, as duas equações de London. Notemos, entretanto, que a expressão (2.19) não é invariante frente a uma transformação de calibre ($\vec{A}' = \vec{A} + \nabla\phi$, onde ϕ é um escalar). Assim, a equação somente será aplicável se for feita a escolha de um dado calibre. A escolha habitual, chamada calibre de London, requer que $\nabla.\vec{A} = 0$. Isto deriva da equação de conservação de corrente, $\nabla.\vec{j}_S = 0$. O calibre de London também requer que a componente de $\vec{A}$ normal à superfície de amostra seja nula ($\vec{A}_n = 0$, na superfície do supercondutor). Esta condição exige que a componente da densidade de corrente normal à superfície seja nula, o que é aceitável se não houver correntes externas. Finalmente, o calibre de London exige que $\vec{A} \to 0$ no interior de amostras massivas.

2.2. A ELETRODINÂMICA NÃO-LOCAL DE PIPPARD

2.2.1. A Fórmula de Chambers

A lei de Ohm, $\vec{j}(\vec{r}) = \sigma\vec{E}(\vec{r})$, tem um caráter local, ou seja, a densidade de corrente num certo ponto $\vec{r}$ do condutor é devida apenas ao campo elétrico naquele ponto. Porém, numa situação em que o campo elétrico varia rapidamente com a posição, pode-se conceber que o movimento de um elétron no ponto $\vec{r}$ dependa da variação do campo ao longo de sua trajetória entre duas colisões sucessivas. Em outros termos, a corrente no ponto $\vec{r}$ pode depender do campo no ponto $\vec{r}\,'$, e teremos

$$\vec{j}(\vec{r}) = \int s(\vec{r} - \vec{r}\,')\vec{E}(\vec{r}\,')d^3r' \qquad (2.23)$$

Esta generalização da lei de Ohm para incluir efeitos de não localidade deve-se a Chambers (1971). Claramente, a função $s(\vec{r} - \vec{r}\,')$ na equação (2.23) não deve se estender por todo o espaço, mas apenas num volume limitado em torno do ponto $\vec{r}$, cujo raio é aproximadamente o livre caminho médio eletrônico *l*. Chambers supôs que $s(\vec{r} - \vec{r}\,')$ decai exponencialmente com o aumento da distância ao ponto $\vec{r}$. Juntando estas hipóteses e considerando um material isotrópico, a fórmula de Chambers toma a forma

$$\vec{j}(\vec{r}) = \frac{3\sigma}{4\pi l}\int \frac{(\vec{R}\vec{R})\cdot\vec{E}(\vec{r}\,')}{R^4}\exp(-R/l)\,d^3r' \qquad (2.24)$$

onde $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}\,'$, $\vec{R}\vec{R}$ representa uma diádica e σ é a condutividade do meio. Verifica-se, sem maior dificuldade, que a expressão (2.24) se reduz à lei de Ohm (com caráter local) quando $\vec{E}(\vec{r}\,')$ é constante no volume de correlação e pode ser retirado para fora da integral.

É importante que $\vec{E}$ varie significativamente na escala de tamanho de *l* para que efeitos não locais sejam observados na condução elétrica de sistemas normais.

2.2.2. O Comprimento de Coerência

Argumentando que no estado supercondutor os elétrons são fortemente correlacionados e a indução magnética varia acentuadamente com a posição em escalas microscópicas, Pippard (1953) propôs, fenomenologicamente, uma generalização não-local da equação de London (2.19) na forma

$$\vec{j}_s(\vec{r}) = \int \Gamma(\vec{r} - \vec{r}\,')A(\vec{r}\,')d^3r'. \qquad (2.25)$$

A figura 2.2 ilustra a dependência com a posição da função caroço $\Gamma(\vec{r} - \vec{r}\,')$, que é análoga à $s(\vec{r} - \vec{r}\,')$ da proposta de Chambers, equação (2.23).

Fazendo, então, uma analogia com a fórmula de Chambers, equação (2.24), podemos escrever

$$\vec{j}_s(\vec{r}) = -\frac{3}{4\pi\xi_o\mu_o\lambda_L^2}\int \frac{(\vec{R}\vec{R})\cdot\vec{A}(\vec{r}\,')}{R^4}\exp(-R/\xi_0)\,d^3r' \;, \qquad (2.26)$$

onde, novamente, $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}\,'$ e ξ_o é uma dimensão característica que fornece a escala de variação espacial da função de onda supercondutora. A quantidade ξ_o é chamada de comprimento de coerência e seu valor pode ser estimado a partir da aplicação do princípio da incerteza.

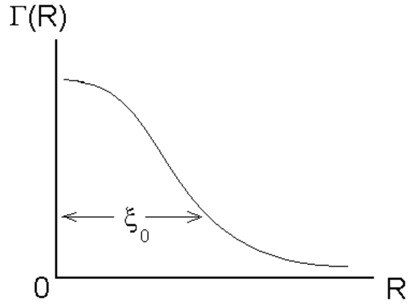

Figura 2.2: *Variação da função caroço nas equações* (*2.25*) *e* (*2.26*) *em função da distância à origem, a qual é dada pela posição* $\vec{r}$ *do elétron de condução;* ξ_0 *é o comprimento de coerência.*

Suponhamos que apenas os elétrons que se distribuem numa região de largura ~ $k_B T_c$ em torno da energia de Fermi são relevantes ao fenômeno de supercondutividade. Então, estes elétrons possuem momentos que variam no intervalo $\Delta p \approx k_B\, T_c / v_F$, onde v_F é a velocidade de Fermi. A incerteza na posição será $\Delta x \geq h / \Delta p$. Identificando Δx como o comprimento de coerência, obtemos

$$\xi_0 = c_0 \frac{h v_F}{k_B T_C} \tag{2.27}$$

onde c_0 é uma constante de ordem unitária.

Nos elementos puros supercondutores, $\xi_0 >> \lambda_L(0)$. Como o potencial vetor varia na escala de tamanho de λ_L, podemos esperar, nestes casos, que efeitos de não-localidade na densidade de super-corrente sejam relevantes. Em outros termos, devemos obter uma densidade de super-corrente enfraquecida quando comparada àquela que teríamos se $A(r)$ se mantivesse constante no volume de correlação cujo raio é ξ_0. Se $A(r)$ se mantivesse constante numa camada de espessura ξ_0 adjacente à superfície, a equação (2.26) se reduziria ao resultado de London, $\vec{j}_s = (-1/\mu_0 \lambda_L^2)\vec{A}$. No entanto, A é diferente de zero apenas dentro de uma espessura λ , que nos sistemas puros é menor que ξ_0. Isto significa que, para um sistema isotrópico, a integral em (2.26) pode ser aproximada por

$$(4\pi/3)\int_0^{\lambda} \exp[-R/\xi_0]dR$$

e a super-corrente de London fica reduzida por um fator λ/ξ_0, ou seja,

$$\vec{j}_s \approx -\frac{1}{\mu_0 \lambda_L^2}\frac{\lambda}{\xi_0}\vec{A}, \tag{2.28}$$

desde que se suponha que $\lambda << \xi_0$. Este resultado equivale a uma renormalização do comprimento de penetração. Escrevendo, de modo autoconsistente, que $j_S = -(1/\mu_0 \lambda^2)A$, obtemos $\lambda^2 = \lambda_L^2 \xi_0 / \lambda$, ou seja,

$$\lambda = \left(\lambda_L^2 \xi_0\right)^{\frac{1}{3}}, \tag{2.29}$$

que é efetivamente maior que o comprimento de penetração calculado com a teoria de London. O resultado expresso pela equação (2.29) é, por vezes, chamado de comprimento de penetração de Pippard.