

## Relatividade Especial

Rafael Ferraro

*Instituto de Astronomía y Física del Espacio,  
Casilla de Correo 67, Sucursal 28, 1428 Buenos Aires, Argentina  
and Departamento de Física,  
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires,  
Ciudad Universitaria, Pabellón I, 1428 Buenos Aires, Argentina*

### 1 O Princípio da relatividade e as leis de Maxwell

O Princípio da relatividade afirma que as leis fundamentais da Física são satisfeitas em todos os sistemas inerciais. Poderia então se perguntar se as leis de Maxwell têm ou não o status de leis fundamentais da Física, no sentido de que o enunciado do Princípio da relatividade seja válido para elas. Para analisar esta questão, vamos considerar a distribuição de cargas da Figura 1. A Figura da esquerda mostra dois fios infinitos que transportam correntes iguais; um deles é neutro e o outro está carregado. As leis do eletromagnetismo dizem que existe uma interação magnética entre ambos os fios. Na Figura da direita está representada a mesma configuração vista num referencial que acompanha as cargas positivas. Neste caso as leis de Maxwell dizem que não existe interação alguma pois um dos fios não tem corrente enquanto o outro fio não tem

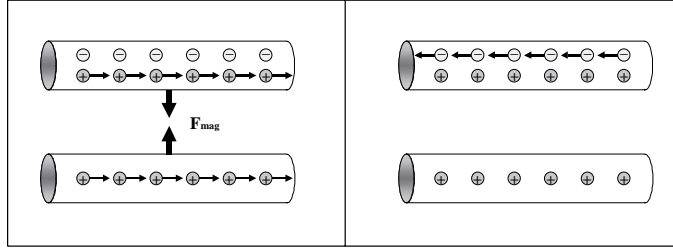


Figura 1: *Paradoxo da força entre duas distribuições em referenciais distintos.*

carga. Os resultados obtidos aplicando as mesmas leis em dois referenciais distintos são claramente contraditórios (a existência de uma interação deveria ser um fato absoluto, independente do referencial). Em princípio esta contradição pareceria indicar que não é possível utilizar as leis de Maxwell em dois referenciais distintos. Em tal caso as leis de Maxwell não seguiriam o Princípio da relatividade, e seria necessário identificar o referencial onde elas são aplicáveis. Contudo, devemos destacar que a passagem da Figura da esquerda para a Figura da direita não é completamente inocente porque envolve duas suposições: que as distâncias não mudam (as distâncias são *absolutas*) e que as cargas não mudam.

A crença em distâncias absolutas tem sido uma pedra basal na construção da Mecânica de Newton, e devemos admitir que a nossa experiência cotidiana diz que se trata de uma hipótese aceitável sobre a natureza do espaço. Mas a experiência cotidiana é boa conselheira só no espectro de fenômenos que ela mesma abrange. Vamos examinar como a crença em distâncias absolutas entra nas transformações de Galileu. Da Figura 2 fica claro que  $d_{OP} = d_{OO'} + d_{O'P}$ . Esta relação entre as distâncias vale se todas elas são medidas num mesmo referencial, seja  $S$  ou  $S'$ . O que chamamos de coordenada  $x$  do ponto  $P$  não é mais que a distância  $d_{OP}$  medida em  $S$ , enquanto  $x'$  é a  $d_{O'P}$  medida em  $S'$ . Por outro lado,  $d_{OO'}$  medida em  $S$  é igual a  $Vt$ . Daqui concluímos que

$$d_{O'P} \text{ medida em } S = x - Vt \quad (1)$$

Só a nossa crença em distâncias absolutas nos leva a substituir o membro da esquerda por  $x'$ , para assim obtermos as transformações de Galileu. Alias, a hipótese de distâncias absolutas leva inevitavelmente a considerar tempos igualmente absolutos. Com efeito, para que não exista privilegio entre  $S$  e  $S'$  a

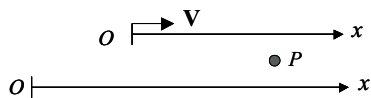


Figura 2: *Coordenadas do ponto P em referenciais distintos.*

transformação de Galileo inversa deve ser igual à direta, exceto pela mudança de  $V$  por  $-V$ :

$$x' = x - Vt, \quad x = x' + Vt', \quad (2)$$

mas isto é consistente só se

$$t' = t \quad (3)$$

O problema com o uso das leis de Maxwell em referenciais distintos pode ser formulado nesta frase: as leis de Maxwell **não** são invariantes sob transformações de Galileo. Na realidade, Maxwell não se preocupava com esta questão porque as ondas eletromagnéticas que resultavam de suas equações eram vistas naquela época como ondas materiais (resultado da perturbação de um meio material: o *éter*), como outras tantas ondas materiais conhecidas (o som, as perturbações da superfície da água de um tanque, etc.). Este tipo de fenômenos tem um referencial *naturalmente* privilegiado, que é o sistema fixo ao meio material onde a perturbação se propaga. A equação de onda que descreve essa propagação só é válida no sistema fixo ao meio, e Maxwell não pretendia que fosse invariante sob transformações de Galileo (é fácil verificar que não é). Ainda mais, a velocidade de propagação da onda está escrita na própria equação de onda, aparecendo como um coeficiente relacionado com as propriedades do meio material; é evidente que essa só pode ser a velocidade de propagação relativa ao meio. Com efeito, das transformações de Galileo resulta que as velocidades não são invariantes,

$$u_x' = u_x - V, \quad (4)$$

portanto, no contexto das transformações de Galileo, uma equação de onda só pode valer num único referencial.

A teoria ondulatória da luz é anterior a Maxwell: nasceu com Huygens (1678), e alcançou a sua formulação matemática acabada com Fresnel (1818). A semelhança entre o valor conhecido da velocidade da luz e a velocidade de propagação das ondas eletromagnéticas de Maxwell, foi considerada uma prova

de que a luz é um fenômeno eletromagnético. O caráter intangível do éter (a luz se propaga em regiões aparentemente vazias), levou os físicos do século XIX a tentarem detectar não mais o próprio éter, mas o nosso estado de movimento em relação ao éter. Os experimentos procuravam medir diferenças nas velocidades de propagação de raios de luz, que revelassem uma composição galileana entre a velocidade da luz relativa ao éter e a velocidade do laboratório relativa ao éter (Hoek, 1868; Michelson, 1881; Michelson-Morley, 1887; etc.), ou alterações da lei de Snell devidas ao movimento relativo ao éter do material transparente onde um raio se refrata (Arago, 1810; Airy, 1871). Os resultados destes experimentos foram sempre negativos: o movimento do laboratório relativo ao éter nunca foi detectado. Fizeram-se diferentes hipóteses com relação à interação do éter com a matéria para justificar estes resultados. Tais teorias dinâmicas sobre a interação entre o éter e o resto da matéria atingiram sua forma mais elaborada na Teoria dos elétrons de Lorentz (1895).

## 2 A relatividade de Einstein

Enquanto a comunidade científica debatia estas questões, em 1905 Einstein mudou o enfoque do problema propondo que as leis de Maxwell são leis fundamentais que integram, portanto, o conjunto de leis que satisfazem o Princípio da relatividade. Para Einstein o campo eletromagnético tem identidade própria, e não precisa uma “materialização” através da idéia de um éter. Se o éter não existe, então não há nada que privilegie um referencial com relação a outro, e as leis de Maxwell devem ser válidas em qualquer referencial inercial. Isto significa que *a luz se propaga com a mesma velocidade  $c$  em qualquer referencial inercial*. Não existem então as diferenças de velocidade buscadas pelos experimentadores, e a lei de Snell vale em qualquer laboratório onde o material refrator esteja em repouso relativo. É claro que admitir uma velocidade finita invariante rompe com o teorema da adição de velocidades de Galileo (4), e supõe então o abandono da nossa crença em distâncias e tempos absolutos. Einstein propôs elevar as leis de Maxwell à categoria de leis fundamentais, abandonando as nossas noções intuitivas de espaço e tempo para subordiná-las à invariância da velocidade da luz. Vamos agora reformular a transformação de coordenadas cuidando de não introduzirmos nelas nenhum preconceito sobre a natureza do espaço e do tempo. Na Figura 3 mostramos uma barra percorrida por uma partícula; o movimento relativo barra-partícula fica caracterizado pela



Figura 3: *Movimento relativo barra-partícula.* a) *No referencial próprio da barra;* b) *No referencial próprio da partícula.*

velocidade relativa  $V$ . Na Figura da esquerda está representado o movimento relativo no sistema fixo à barra, enquanto a Figura da direita descreve este movimento no sistema fixo à partícula. Como não estamos dispostos a prejudicar com relação à natureza do espaço e do tempo, desenhamos a barra com diferentes comprimentos em cada sistema. Chamamos de *comprimento próprio*  $L_o$  ao comprimento da barra no sistema onde ela se encontra em repouso. O tempo que demora o percurso da partícula ao longo da barra também pode depender do referencial. Chamamos de *tempo próprio*  $\Delta\tau$  ao tempo transcorrido entre dois eventos medido no referencial onde os eventos acontecem na mesma posição (sempre que um tal sistema exista). No nosso caso, os dois eventos são as passagens da partícula por cada extremo da barra. Estes dois eventos acontecem na mesma posição no sistema fixo à partícula; de modo que o tempo transcorrido entre os eventos é um tempo próprio no sistema da Figura da direita. A definição de velocidade nos permite escrever

$$L_o = V \Delta t \quad L = V \Delta\tau, \quad (5)$$

onde  $\Delta t$  é o tempo do percurso da partícula ao longo da barra no sistema da Figura da esquerda. Daqui resulta

$$\frac{\Delta t}{\Delta\tau} = \frac{L_o}{L} \quad (6)$$

Esta relação diz que se estivermos dispostos a renunciar às distâncias absolutas ( $L_o \neq L$ ), também teremos de renunciar aos tempos absolutos ( $\Delta\tau \neq \Delta t$ ). Além disso, ela diz que a relação entre o comprimento em movimento e o comprimento próprio de um corpo tem o mesmo caráter que a relação entre o tempo próprio e o tempo entre o mesmo par de eventos em outro referencial. Concretamente, ambas as relações não podem depender mais que da velocidade relativa  $V$  entre o sistema próprio correspondente e o outro referencial arbitrário. A equação (5) diz então que a mesma função  $\gamma(V)$  que expressa a



Figura 4: *Percurso da luz. a) No referencial próprio da barra; b) num referencial onde a barra se movimenta.*

relação entre comprimentos tem de expressar também a relação entre tempos:

$$\frac{L_o}{L} = \gamma(V), \quad \frac{\Delta t}{\Delta \tau} = \gamma(V) \quad (7)$$

As relações (6) supõem que o espaço e o tempo são isotrópicos e homogêneos; senão as relações poderiam depender do lugar ou do instante de ocorrência dos eventos ou da orientação da barra. Vamos admitir, como na Física clássica, que o espaço está dotado de uma geometria euclidiana -portanto ele é isotrópico e homogêneo-, e que as relações (6) não dependem do tempo.

A forma da função  $\gamma(V)$  será ditada pela invariância da velocidade da luz, à qual se subordinarão as noções de espaço e tempo. Na Figura 4 vamos considerar como par de eventos a passagem do raio de luz pelo extremo livre da barra, e o seu retorno ao mesmo extremo após ter sido refletido no espelho. Neste caso o tempo próprio entre os eventos corresponde ao sistema fixo à barra, pois ambos os eventos acontecem no mesmo extremo da barra. Como a luz viaja com velocidade  $c$  (em qualquer sistema!),

$$c \Delta \tau = 2 L_o \quad (8)$$

No outro sistema o tempo  $\Delta t$  entre os eventos é calculado com a mesma velocidade  $c$  do raio de luz. Considerando o deslocamento da barra, temos que

$$c \Delta t_{ida} = V \Delta t_{ida} + L, \quad c \Delta t_{volta} = L - V \Delta t_{volta}, \quad (9)$$

$$\Delta t = \Delta t_{ida} + \Delta t_{volta} = \frac{L}{c - V} + \frac{L}{c + V} = \frac{2L}{c} \frac{1}{1 - \frac{V^2}{c^2}} \quad (10)$$

Dividindo (8) e (10), e usando as relações (6) obtemos

$$\gamma(V) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \quad (11)$$

Então

$$\text{contração dos comprimentos} \quad L = L_o \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \quad (12)$$

$$\text{dilatação do tempo} \quad \Delta t = \frac{\Delta \tau}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \quad (13)$$

Estas são as relações entre comprimentos e tempos que resultam de admitir a existência de uma velocidade finita  $c$  invariante (igual em todos os referenciais). Em contrapartida, as transformações de Galileo, só deixam “invariante” a velocidade infinita (veja-se (4)). Consistentemente, reencontramos as noções clássicas de espaço e tempo tomando o limite  $c \rightarrow \infty$  em (12-13). Também vemos em (12-13) a razão pela qual a nossa experiência cotidiana não é capaz de revelar a relatividade de distâncias e tempos: a velocidade invariante  $c$  (a velocidade da luz) é muito maior que as velocidades  $V$  envolvidas no espectro de fenômenos cotidianos, de modo que o fator  $\gamma(V)$  é praticamente igual a 1 nesse espectro. Vocês imaginam agora qual é a resposta relativista ao problema proposto na Figura 1?

Poderíamos perguntar o que acontece com  $\gamma(V)$  se  $V > c$ . Se  $V$  fosse maior que  $c$ , então o raio de luz não atingiria o espelho no sistema onde a barra se movimenta. Isto levaria a uma situação absurda na qual um evento que acontece num sistema (a chegada do raio de luz ao espelho) não acontece no outro sistema. Isto indica que a velocidade  $c$  deve ser uma velocidade limite para os corpos materiais:  $V < c$ . Voltaremos a esta questão na Seção 3.

A coordenada  $x'$  da Figura 2 é  $d_{OP}$  medida em  $S'$ , e podemos pensá-la como sendo o comprimento  $L_o$  de uma régua em repouso no sistema  $S'$ . Então  $d_{OP}$  medida em  $S$  é o comprimento contraído dessa régua:  $d_{OP}|_S = \gamma(V)^{-1} d_{OP}|_{S'} = \gamma(V)^{-1} x'$ . Assim a equação (1) fica

$$x' = \gamma(V)(x - Vt) \quad (14)$$

---

**Exercício:** Como  $S$  e  $S'$  são sistemas em pé de igualdade, a transformação inversa de (14) deve ter a mesma forma, exceto pela mudança de  $V$  por  $-V$ ,

$$x = \gamma(V)(x' + Vt') \quad (15)$$

Utilize (14) e (15) para obter

$$t' = \gamma(V)(t - Vc^{-2}x) \quad (16)$$

$$t = \gamma(V)(t' + Vc^{-2}x') \quad (17)$$

**Exercício:** *Mostre que os comprimentos transversais a  $\mathbf{V}$  não mudam,*

$$y' = y, \quad z' = z \quad (18)$$

*(Ajuda: Use um experimento imaginado, como aquele que permitiu calcular  $\gamma(V)$ , onde a barra com o espelho seja perpendicular à direção do eixo  $x$ ).*

As transformações (14), (16) e (18) são as transformações de coordenadas que deixam invariante a equação de onda com velocidade de propagação  $c$ . São chamadas transformações de Lorentz (Voigt, 1887; Larmor, 1900; Lorentz, 1899, 1904). Embora tenham sido obtidas antes do trabalho de Einstein, sua interpretação era completamente diferente. Enquanto para Einstein a contração dos comprimentos e a dilatação do tempo são efeitos puramente cinemáticos que não privilegiam nenhum referencial (a barra terá comprimento  $L_0$  em qualquer referencial onde ela se encontre fixa, e terá comprimento  $L$  em qualquer referencial onde ela se movimenta longitudinalmente com velocidade  $V$ ), segundo Lorentz a velocidade  $V$  era a velocidade da barra relativa ao éter, e a contração era um fato absoluto (verificado em todo referencial) produzido por uma interação com o éter. Segundo Lorentz a “dilatação do tempo” não afetava ao tempo absoluto senão que envolvia um “tempo matematicamente auxiliar”.

Em Relatividade se utilizam gráficos  $ct$  vs.  $x$ . Em tais gráficos um evento é um ponto, e um raio de luz é uma reta a  $45^\circ$ . Os movimentos das partículas são denominados linhas de universo (veja-se a Figura 5 esquerda). Costuma-se inserir as linhas coordenadas do sistema  $S'$  no gráfico espaço-tempo do sistema  $S$ . Para isso usamos as transformações (14) e (16) para determinar os lugares geométricos dos eventos que têm  $t' = \text{constante}$  e  $x' = \text{constante}$ , que são retas com inclinação  $V/c$  e  $(V/c)^{-1}$  respectivamente. Em particular  $t' = 0$  caracteriza os eventos que formam o eixo  $x'$ , enquanto  $x' = 0$  caracteriza os eventos que formam o eixo  $t'$  (veja-se a Figura 5 direita). Para obter resultados quantitativos destes gráficos mistos é necessário calibrar previamente os eixos de ambos os referenciais. À diferença das rotações, as transformações de Lorentz não deixam invariantes circunferências e sim hipérbolas (como veremos logo em seguida); de modo que as unidades de medida nos eixos de  $S'$  diferem das unidades nos eixos de  $S$ . Em contrapartida, não há dificuldade em se obter resultados qualitativos, e o mais evidente de todos eles é que os eventos simultâneos em  $S$  não



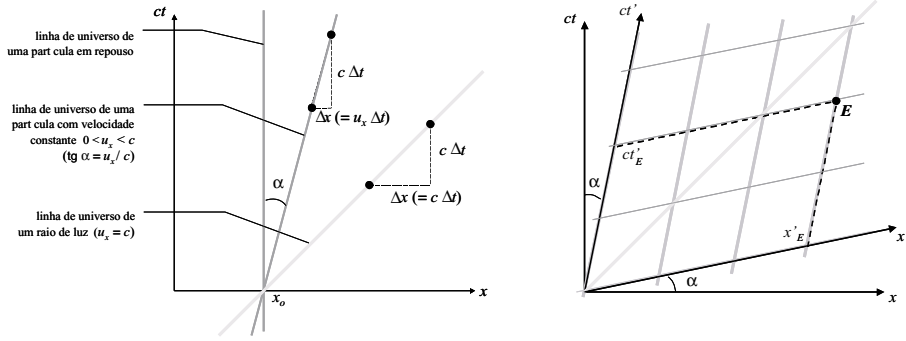


Figura 5: a) Linhas de universo de partículas e raios de luz. b) Linhas coordenadas do sistema  $S'$  no gráfico do sistema  $S$ .

são simultâneos em  $S'$  e vice-versa. A *simultaneidade de eventos é uma noção relativa* (enquanto em Física clássica ela é absoluta). Com efeito, no sistema  $S$  são simultâneos todos os eventos que tenham a mesma coordenada  $t$ , ou seja, todos os pontos que estejam sobre uma mesma reta paralela ao eixo  $x$  da Figura 5. Por outro lado, em  $S'$  são simultâneos todos os eventos que tenham a mesma coordenada  $t'$ ; isto é, trata-se de pontos dispostos sobre uma mesma reta paralela ao eixo  $x'$  da Figura 5. Evidentemente as noções de simultaneidade de cada sistema diferem entre si ( $\Delta t = 0$  **não** implica em  $\Delta t' = 0$  nas transformações de Lorentz). A relatividade da simultaneidade é o ingrediente necessário para justificar que dois referenciais não concordem sobre as dimensões de um objeto. A medição de uma barra no sistema  $S$  implica na determinação das posições simultâneas dos seus extremos. Esta medição não é “boa” para o sistema  $S'$  porque ele não compartilha a noção de simultaneidade de  $S$ .

---

**Exercício:** Mostre que as transformações de Lorentz deixam invariante a seguinte combinação de distâncias e tempos que chamamos de intervalo:

$$\Delta s^2 = c^2 (\Delta t)^2 - |\Delta \mathbf{r}|^2 \quad (19)$$

onde  $\Delta t$  e  $|\Delta \mathbf{r}|$  são o tempo decorrido e a distância entre dois eventos quaisquer ( $|\Delta \mathbf{r}|^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2$ ). Invariante significa que a grandeza em questão tem o mesmo valor em qualquer referencial.

---

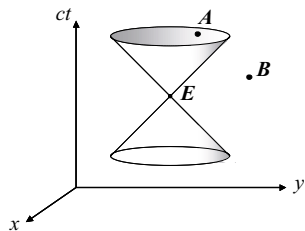


Figura 6: Cone de luz do evento  $E$  (a coordenada  $z$  foi suprimida).

Se as coordenadas espaciais não aparecessem com sinal oposto ao da coordenada temporal, o intervalo teria o aspecto de uma distância euclidiana num espaço-tempo de quatro dimensões. Dizemos então que o espaço-tempo tem uma geometria pseudo-euclidiana (espaço-tempo de Minkowski).

A invariância do intervalo permite classificar pares de eventos de forma independente dos referenciais. Dizemos que um par de eventos tem separação *temporal*, *espacial* ou *nula* se o intervalo entre eles é, respectivamente, positivo, negativo ou zero. Os eventos com separação nula estão sobre raios de luz ( $\Delta s = 0 \Leftrightarrow c\Delta t = \pm|\Delta\mathbf{r}|$ ). Esta classificação absoluta introduz no espaço-tempo a noção de cone de luz de um evento. O cone de luz de um evento  $E$  é formado por todos os eventos que têm separação nula com  $E$ . Isto significa que o cone de luz de  $E$  é gerado por todos os raios de luz que passam por  $E$ . Os eventos interiores ao cone de  $E$  estão separados temporalmente de  $E$ . Os eventos exteriores ao cone de  $E$  estão separados espacialmente de  $E$ . Na Figura 6 se percebe que se dois eventos  $E$  e  $A$  estão separados temporalmente existe sempre um referencial onde os dois eventos acontecem na mesma posição: o eixo  $t'$  deveria ser paralelo à linha  $EA$  (neste caso existe o tempo próprio entre os eventos). Por outro lado, se dois eventos  $E$  e  $B$  estão separados espacialmente existe sempre um referencial onde os dois eventos são simultâneos; no resto dos referenciais ou bem  $E$  acontece antes de  $B$ , ou bem  $B$  acontece antes de  $E$ . Portanto, não podemos falar de uma relação causa-efeito entre eventos separados espacialmente. Ao contrario, a ordem temporal de dois eventos separados temporalmente é a mesma em todos os referenciais.

**Composição relativista dos movimentos.** Para determinarmos a correção relativista ao teorema da adição de velocidades de Galileo (4), vamos novamente considerar uma partícula que percorre com velocidade  $u_x$  uma barra



Figura 7: Movimento relativo barra-partícula. a) Num referencial quaisquer; b) no referencial próprio da barra.

que se movimenta com velocidade  $V$  (Figura 7). O tempo transcorrido entre as passagens da partícula frente a cada extremo da barra satisfaz

$$u_x \Delta t = L + V \Delta t = \gamma(V)^{-1} L_0 + V \Delta t = \gamma(V)^{-1} u_x' \Delta t' + V \Delta t \quad (20)$$

Neste caso, nem  $\Delta t$  nem  $\Delta t'$  são tempos próprios, porque o tempo próprio transcorre no sistema fixo à partícula. A relação do tempo próprio com  $\Delta t$  e  $\Delta t'$  é então

$$\Delta t = \gamma(u) \Delta \tau, \quad \Delta t' = \gamma(u') \Delta \tau, \quad \text{de jeito que } \gamma(u')^{-1} \Delta t' = \gamma(u)^{-1} \Delta t \quad (21)$$

e substituindo

$$\gamma(u') u_x' = \gamma(u) \gamma(V) (u_x - V) \quad (22)$$

Se acrescentarmos uma componente transversal ao movimento da partícula e lembrarmos que  $\Delta y' = \Delta y$ , então  $u_y' \Delta t' = u_y \Delta t$ , e daí resulta

$$\gamma(u') u_y' = \gamma(u) u_y; \quad \text{analogamente} \quad \gamma(u') u_z' = \gamma(u) u_z \quad (23)$$

Quando  $c \rightarrow \infty$  os fatores  $\gamma$  tendem a 1 e recuperamos as transformações de velocidade galileanas.

Nas transformações (22-23) podemos nos livrar de  $\gamma(u')$  e  $\gamma(u)$ . Para isto, construímos a transformação inversa de (22) mediante o argumento de que a única mudança deve ser a de  $V$  por  $-V$ :

$$\gamma(u) u_x = \gamma(u') \gamma(V) (u_x' + V) \quad (24)$$

Substituindo (22) em (24) obtemos

$$\gamma(u') = \gamma(u) \gamma(V) \left[ 1 - \frac{u_x V}{c^2} \right] \quad (25)$$

e dividindo (22) e (23) por (25):

$$u_x' = \frac{u_x - V}{1 - \frac{u_x V}{c^2}}, \quad u_y' = \frac{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} u_y}{1 - \frac{u_x V}{c^2}}, \quad u_z' = \frac{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} u_z}{1 - \frac{u_x V}{c^2}} \quad (26)$$

**Exercício:** *Obtenha as transformações (26) derivando as transformações de Lorentz das coordenadas ao longo da linha de universo da partícula.*

**Exercício:** *Derive em (26) para obter as transformações da aceleração.*

**Transformação de um raio de luz.** Num referencial  $S$ , seja um raio de luz com frequência  $\nu$  e direção de propagação  $\hat{\mathbf{n}}$  (veja-se a Figura 8). Seja  $\Delta t$  o tempo transcorrido no sistema  $S$  entre as passagens de duas frentes de onda sucessivas pela posição de um observador que se movimenta com velocidade  $\mathbf{V}$ , de maneira que no tempo  $\Delta t$  a segunda frente percorre o comprimento de onda que a separa da primeira frente, mais a distância que o observador se desloca perpendicularmente aos frentes de onda. Então

$$c \Delta t = \lambda + \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}} \Delta t \quad \implies \quad \Delta t = \frac{\nu^{-1} c}{c - \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}}} \quad (27)$$

Transformando  $\Delta t$  no tempo próprio do observador, obtemos o período no sistema do observador:  $\Delta t = \gamma(V) T_{obs} = \gamma(V) \nu'^{-1}$ . Logo,

$$\nu' = \frac{1 - \frac{\mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}}}{c}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \nu \quad (28)$$

Devido à dilatação do tempo, existe efeito Doppler mesmo que  $\mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0$ . A verificação experimental deste *efeito Doppler transversal* é uma comprovação direta da dilatação do tempo.

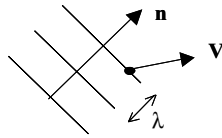


Figura 8: *Onda plana propagando-se na direção  $\hat{\mathbf{n}}$  e observador movimentando-se com velocidade  $\mathbf{V}$*

**Exercício:** Escreva a transformação inversa de (28), multiplique ambas, chame de  $\theta$  ao ângulo entre a direção de propagação e o vetor  $\mathbf{V}$ , e obtenha a transformação da direção de propagação (aberração da luz):

$$\cos \theta' = \frac{\cos \theta - \frac{V}{c}}{1 - \frac{V}{c} \cos \theta} \quad (29)$$

**Exercício:** Obtenha a equação (29) substituindo nas transformações (26) as componentes da velocidade do caso limite em que a partícula se movimenta com velocidade  $c$ :  $u_x = c \cos \theta$ ,  $u_y = c \sin \theta$ ,  $u_x' = c \cos \theta'$ ,  $u_y' = c \sin \theta'$ .

---

### 3 Dinâmica relativista

As novas noções de espaço e tempo, adequadas para que às leis de Maxwell tenham o status de leis fundamentais que obedecem o Princípio da relatividade, levam obrigatoriamente à reformulação da Dinâmica clássica. Com efeito, as leis da Dinâmica newtoniana estão baseadas na invariância de distâncias e tempos. Na Segunda Lei de Newton  $-\mathbf{F} = m \mathbf{a}$ , a força é dada por uma lei para a interação (como a lei da gravitação, a lei de Hooke, etc.); as interações fundamentais dependem de distâncias, e como as distâncias são invariantes, as forças também o são. Por outro lado, as acelerações são invariantes sob transformações de Galileo. Deste modo, a Segunda Lei de Newton é consistente com o Princípio da relatividade galileano (a massa é considerada uma propriedade da partícula que não depende do referencial). Em contrapartida, na Relatividade Especial a interação paradigmática é a interação electromagnética, de maneira que a força paradigmática é a força de Lorentz que depende da velocidade da carga. Por outro lado, longe de ser invariante, a aceleração se transforma de maneira muito complicada sob transformações de Lorentz. Isto significa que reformular a Dinâmica a partir da Segunda Lei de Newton não parece ser um bom plano.

Quando combinamos a Segunda Lei de Newton e o Princípio da ação e reação (Terceira Lei de Newton) obtemos a conservação do momento de um sistema de partículas isolado. A conservação resulta da anulação de todas as forças internas (as únicas que existem num sistema isolado) devido a que em cada instante elas formam pares de ação e reação. Qualquer variação do momento de uma parte do sistema é compensada instantaneamente por

uma variação igual e oposta da outra parte do sistema. Esta compensação simultânea acontece mesmo que ambas as partes estejam separadas, porque na Física clássica se admite a existência de interações instantâneas à distância. A conservação do momento se verifica em todos os sistemas inerciais, como podemos comprovar se multiplicarmos o teorema da adição de velocidades de Galileo pela massa da partícula e somarmos sobre todas as partículas do sistema:

$$\mathbf{u}' = \mathbf{u} - \mathbf{V}, \quad m\mathbf{u}' = m\mathbf{u} - m\mathbf{V}, \quad \mathbf{p}' = \mathbf{p} - m\mathbf{V}, \quad \Sigma \mathbf{p}'_i = \Sigma \mathbf{p}_i - \mathbf{V}\Sigma m_i \quad (30)$$

O último termo da última equação é a massa total do sistema multiplicada pela velocidade relativa  $S' - S$ . Na Física clássica, se aceita a conservação da massa de um sistema isolado. Assim, a conservação da massa e do momento em  $S$  conduzem à conservação do momento em  $S'$ .

Será a lei da conservação do momento um bom ponto de partida para se reformular a Dinâmica? Em primeiro lugar, a noção de simultaneidade de eventos separados não é absoluta em Relatividade. Portanto, a compensação simultânea à distância do Princípio da ação e reação não é admissível. As únicas compensações admissíveis devem ser *locais*. Em Relatividade, a interação instantânea à distância é substituída por interações mediadas por campos que transportam energia e momento com velocidade finita. Então, quando se estuda um sistema de partículas em interação, o momento das partículas não se conserva separadamente (como diria a Terceira Lei), mas se conserva localmente a soma dos momentos das partículas e o campo mediador. No eletromagnetismo -a interação paradigmática da Relatividade Especial- o campo eletromagnético pode receber localmente energia e momento de uma carga. Como o campo transporta energia e momento com a velocidade finita  $c$ , posteriormente ele poderá transferir energia e momento para outra carga em outro lugar. Mas não existe uma transferência instantânea entre cargas separadas.

O nosso objetivo é averiguar qual é a grandeza que faz o papel do momento relativista de uma partícula. Para evitarmos considerar campos mediadores, vamos começar estudando um sistema de partículas que só interagem localmente através de choques, de modo que o único momento em jogo é o das partículas. Se repetimos o esquema da equação (30), com as transformações relativistas de velocidade (22-23), obtemos:

$$m\gamma(u')u_x' = \gamma(V) [m\gamma(u)u_x - m\gamma(u)V] \quad (31)$$

$$m\gamma(u')u_y' = m\gamma(u)u_y, \quad m\gamma(u')u_z' = m\gamma(u)u_z \quad (32)$$

Estas expressões sugerem que a grandeza que faz o papel do momento de uma partícula, de acordo com as noções relativistas de espaço e tempo, deveria ser

$$\mathbf{p} = m\gamma(u)\mathbf{u} = \frac{m\mathbf{u}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \quad (33)$$

Naturalmente, o experimento deverá confirmar se esta é a grandeza conservada ou não. Em 1908, Bucherer verificou experimentalmente que a deflexão de uma partícula carregada movendo-se com alta velocidade num campo elétrico não obedecia a lei  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ ; o desvio era convincentemente descrito por  $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$ , onde  $\mathbf{p}$  é o momento relativista (33).

Como podemos ver nas equações (31)-(32),  $\mathbf{p}$  se transforma da seguinte forma:

$$p_x' = \gamma(V)[p_x - m\gamma(u)V], \quad p_y' = p_y, \quad p_z' = p_z \quad (34)$$

Esta transformação traz uma surpresa que poderia ser considerada o resultado mais dramático da Relatividade Especial. Para que  $\Sigma \mathbf{p}_i$  se conserve em  $S$  e em  $S'$ , não é mais a massa total do sistema que deve se conservar separadamente (como acontecia na equação (30)). Seu lugar foi tomado por  $\Sigma m_i\gamma(u_i)$ , de modo que a conservação do momento relativista em qualquer sistema inercial, de acordo com o Princípio da relatividade, já não exige a conservação da massa de um sistema isolado e sim a conservação de uma grandeza que combina as massas e as velocidades das partículas individuais. Para entendermos que tipo de grandeza é essa, vamos desenvolver  $\gamma(u)$ :

$$m\gamma(u) = m + (1/2)m u^2 c^{-2} + O(u^4/c^4) \quad (35)$$

Naturalmente, o primeiro termo do desenvolvimento é a massa, mas o segundo termo é a energia cinética clássica dividida por  $c^2$ . Definimos a *energia relativista* de uma partícula como

$$E = m\gamma(u)c^2 = \frac{m c^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = m c^2 + T, \quad (36)$$

onde  $m c^2$  é a *energia em repouso* e  $T$  é a *energia cinética relativista*. A energia relativista total de um sistema isolado deve se conservar; se assim não fosse, a conservação do momento total não satisfaria o Princípio da relatividade. Do

mesmo modo, a conservação da energia relativista de um sistema isolado verifica o Princípio da relatividade graças à conservação do momento. Em um sistema de partículas livres que só interagem mediante choques, a energia relativista total é a soma das energias das partículas:  $\varepsilon = \Sigma E_i$ . Se as partículas interagem “à distância”, a energia relativista total do sistema isolado inclui a energia dos campos mediadores.

Combinando as definições de energia e momento, obtemos

$$\mathbf{p} = c^{-2} E \mathbf{u} \quad (37)$$

Este é um típico resultado relativista: o momento é um fluxo de energia. Multiplicando a equação (25) por  $mc^2$  obtemos a transformação da energia. Combinando este resultado com a equação (34), podemos escrever:

$$E' = \gamma(V) [E - Vp_x], \quad p_x' = \gamma(V) [p_x - Vc^{-2}E], \quad p_y' = p_y, \quad p_z' = p_z \quad (38)$$

As transformações (38) são inteiramente similares às transformações de Lorentz das coordenadas. Isto se explica usando o tempo próprio da partícula, que é o tempo que transcorre no sistema fixo a ela. Segundo a equação (13) é  $d\tau = \gamma(u)^{-1}dt$ . Então  $\mathbf{u} = d\mathbf{r}/dt = \gamma(u)^{-1}d\mathbf{r}/d\tau$ ,  $\mathbf{p} = m d\mathbf{r}/d\tau$ ,  $E = mc^2 dt/d\tau$ . Como  $d\tau$  é invariante ( $d\tau = \gamma(u)^{-1}dt = \gamma(u')^{-1}dt'$ , veja-se também (21))<sup>1</sup>, então  $(c^{-1}E, \mathbf{p})$  se transforma como  $(ct, \mathbf{r})$ . Uma mesma transformação implica num mesmo tipo de invariante. O invariante que se forma com as coordenadas é o intervalo. Analogamente o *invariante energia-momento* é

$$E^2 - p^2c^2 = E^2 - E^2u^2c^{-2} = E^2\gamma(u)^{-2} = m^2c^4 \quad (39)$$

O invariante energia-momento dá a medida da massa da partícula. Se diferenciarmos a equação (39) e substituirmos na equação (37), teremos

$$0 = 2E dE - 2c^2 \mathbf{p} \cdot d\mathbf{p} = 2E(dE - \mathbf{u} \cdot d\mathbf{p}) \implies dE = d\mathbf{r} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{dt} \quad (40)$$

A equação (40) deve ser vista como a relação entre trabalho e variação da energia, e ela indica que a força é igual a  $d\mathbf{p}/dt$ :

---

<sup>1</sup> $d\tau^2 = \gamma(u)^{-2} dt^2 = (1 - c^{-2}u^2) dt^2 = c^{-2}(c^2 dt^2 - d|\mathbf{r}|^2) = c^{-2} ds^2$ , onde  $ds^2$  é o intervalo entre eventos vizinhos da linha de universo da partícula.



$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \quad (41)$$

(verifica-se que a força de Lorentz e  $d\mathbf{p}/dt$  se transformam da mesma maneira). Fica claro que  $d\mathbf{p}/dt$  não é proporcional à aceleração  $\mathbf{a}$ , pois  $\mathbf{p}$  não é proporcional a  $\mathbf{u}$ . Em Relatividade, a força e a aceleração não são colineares. Como a energia relativista de uma partícula tende a infinita quando sua velocidade tende a  $c$ , teria de ser feito um trabalho infinito para que a velocidade de uma partícula aumentasse até atingir a velocidade da luz. Portanto, a velocidade da luz é uma velocidade limite para uma partícula.

**Referencial de centro de momento.** Chamamos assim o referencial onde o momento de um sistema isolado se anula. Se o momento é  $\mathbf{P}' = 0$  num sistema  $S'$  que se movimenta com velocidade  $\mathbf{U}_c$  em relação a  $S$ , então o valor de  $\mathbf{P}$  em  $S$  é (usar as transformações (38)):

$$\mathbf{P} = c^{-2} \varepsilon_c \gamma(U_c) \mathbf{U}_c = c^{-2} \varepsilon \mathbf{U}_c \quad (42)$$

Comparando a relação (42) para um sistema de partículas com a expressão (33) para uma partícula concluímos que a energia  $\varepsilon_c$  do sistema físico no sistema centro de momento faz o papel da massa do sistema (multiplicada por  $c^2$ ). Isto significa que a energia interna de um sistema composto contribui para sua massa. Por exemplo, a massa de um gás ideal contido num volume em repouso não é somente a soma das massas de suas partículas, pois ela recebe uma contribuição da energia cinética das partículas.

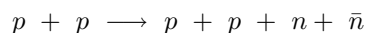
**Equivalência massa-energia.** A conservação da energia relativista em substituição ao Princípio clássico de conservação da massa abre a possibilidade de converter massa em outros tipos de energia e vice-versa, sendo este o resultado mais dramático da Relatividade Especial. Segundo Einstein (1905), “a massa de um corpo é uma medida do seu conteúdo de energia”. Esta *equivalência massa-energia* pode ser observada em vários fenômenos físicos:

- *defeito de massa:* a massa de um sistema composto não é a soma das massas de seus constituintes pois a energia de ligação contribui para sua massa. Por exemplo, um núcleo de  ${}^4\text{He}$  é formado por dois prótons e dois nêutrons, e sua energia em repouso (massa) é 3727,379 MeV. Podemos pensar no  ${}^4\text{He}$  como constituído por dois dêuterons (com um próton e um nêutron cada um deles). A energia em repouso (massa) de um dêuteron é 1875,612 MeV. Como podemos

ver, a massa de dois dêuterons ultrapassa à massa do  ${}^4\text{He}$  em 23,845MeV. A massa do  ${}^4\text{He}$  é menor que a soma das massas de seus constituintes porque recebe uma contribuição negativa da energia interna de ligação que mantém unidos os dêuterons.

- *fusão e fissão nuclear, desintegração espontânea:* são reações nucleares onde a massa das partículas produzidas é menor que a massa das partículas que interagem; como a energia relativista se conserva, isto significa que a diferença de massa se converteu em outro tipo de energia. A diminuição da massa que se produz tanto na fusão —onde núcleos leves se unem para formar um núcleo maior—, como na fissão —onde um núcleo pesado se divide em núcleos menores— pode ser vista como consequência da energia de ligação (negativa) por nucleon ser crescente para núcleos leves (até uns 60 nucleones por núcleo) enquanto é decrescente para núcleos pesados.

- *limiar de energia:* existem reações nas quais a massa das partículas produzidas é maior que a massa das partículas que interagem. Por exemplo, a criação de um par nêutron-antinêutron na colisão entre dois prótons:



Esta reação acontece só se os prótons que se chocam têm energia cinética suficiente para darem conta da massa que é criada. No sistema centro de momento, onde se anula o momento do sistema de partículas, o limiar de energia da reação  $\varepsilon_c \text{ limiar}$  é a energia que permite criar as partículas deixando todos os produtos em repouso. De acordo com a transformação da energia, num referencial qualquer o limiar de energia é  $\varepsilon_{\text{limiar}} = \gamma(U_c) \varepsilon_c \text{ limiar} \geq \varepsilon_c \text{ limiar}$ .

**Colisão elástica.** No exemplo anterior os produtos da reação diferem das partículas que interagem. Por outro lado, se numa colisão as partículas que se chocam são iguais às partículas resultantes a colisão é chamada de *elástica*.

**Fótons.** A Teoria Quântica ensina que o campo eletromagnético troca sua energia e seu momento com a matéria como o fariam partículas de energia e momento

$$E = h\nu, \quad \mathbf{p} = h\nu c^{-1} \hat{\mathbf{n}} \quad (43)$$

onde  $\nu$  é a frequência e  $\mathbf{n}$  é a direção de propagação das ondas planas que configuram o campo ( $h$  é a constante de Planck). Como  $\mathbf{p} = E c^{-1} \hat{\mathbf{n}}$ , essas partículas têm a velocidade da luz (veja-se a equação (37)) e massa nula (veja-se a equação (39)).

---

**Exercício:** Considere o choque elástico entre um fóton e um elétron inicialmente em repouso (efeito Compton). Obtenha que a frequência do fóton muda de  $\nu$  à  $\nu'$  quando o ângulo de desvio do fóton é  $\phi$ , sendo

$$c\nu'^{-1} - c\nu^{-1} = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \phi) \quad (44)$$

**Exercício:** Um elétron e um pósitron de baixa energia aniquilam-se para dar um par de fótons. Qual é a frequência dos fótons? (Note que a reação inversa existe e tem um limiar de energia  $\varepsilon_{c \text{ limiar}} = 2m_e c^2$ ).

**Exercício:** Obtenha a equação (28) usando a transformação da energia (38) aplicada a um fóton (veja-se (43)).

---

#### 4 Transformações do campo eletromagnético

As transformações de Lorentz das coordenadas são uma condição necessária para a invariância das leis de Maxwell (ou seja, para que satisfaçam o Princípio da relatividade). Mas não só as coordenadas, como também os campos devem se transformar adequadamente para esse fim. A linearidade das leis de Maxwell sugere tentar uma transformação linear dos campos. Além disso, a transformação deverá ser homogênea, pois se o campo eletromagnético é nulo num referencial, então ele é igualmente nulo em qualquer outro referencial. Os coeficientes da transformação linear só podem depender da velocidade  $\mathbf{V}$  relativa entre  $S$  e  $S'$ . Eles não podem depender das coordenadas do evento onde os campos são avaliados porque o espaço-tempo é homogêneo. Os vetores  $\mathbf{E}'$  e  $\mathbf{B}'$  serão então combinações de vetores lineares nos campos, construídas com  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{V}$ . Nesta construção devem ser levados em conta os caracteres de vetor polar do campo elétrico e de pseudovetor ou vetor axial do campo magnético. São vetores polares  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{V} \times \mathbf{B}$ ,  $\mathbf{V}(\mathbf{V} \cdot \mathbf{E})$ ,  $\mathbf{V} \times (\mathbf{V} \times \mathbf{E})$ , e são vetores axiais  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{V} \times \mathbf{E}$ ,  $\mathbf{V}(\mathbf{V} \cdot \mathbf{B})$ ,  $\mathbf{V} \times (\mathbf{V} \times \mathbf{B})$ . Não é necessário considerar mais vetores lineares nos campos: por exemplo,  $\mathbf{V} \times (\mathbf{V} \times (\mathbf{V} \times \mathbf{B}))$  é proporcional a  $\mathbf{V} \times \mathbf{B}$ . Por outra parte  $\mathbf{V}(\mathbf{V} \cdot \mathbf{E}) = V^2 \mathbf{E}_{\parallel}$ , enquanto  $\mathbf{V} \times (\mathbf{V} \times \mathbf{E}) = \mathbf{V} \times (\mathbf{V} \times \mathbf{E}_{\perp}) = -V^2 \mathbf{E}_{\perp}$  (chamamos de  $\mathbf{E}_{\parallel}$  e  $\mathbf{E}_{\perp}$ , respectivamente, a projeção de  $\mathbf{E}$  longitudinal e transversal a  $\mathbf{V}$ ). Isto significa que ambas as projeções dos campos podem entrar na transformação com coeficientes diferentes:  $\mathbf{E}'$  é então alguma combinação

linear de  $\mathbf{E}_{\parallel}$ ,  $\mathbf{E}_{\perp}$  e  $\mathbf{V} \times \mathbf{B} = \mathbf{V} \times \mathbf{B}_{\perp}$  com coeficientes dependentes no máximo de  $V$ :

$$\mathbf{E}' = e_1(V) \mathbf{E}_{\parallel} + e_2(V) \mathbf{E}_{\perp} + e_3(V) \mathbf{V} \times \mathbf{B}_{\perp} \quad (45)$$

Analogamente:

$$\mathbf{B}' = b_1(V) \mathbf{B}_{\parallel} + b_2(V) \mathbf{B}_{\perp} + b_3(V) \mathbf{V} \times \mathbf{E}_{\perp} \quad (46)$$

Em particular, as projeções longitudinais destas transformações são

$$\mathbf{E}'_{\parallel} = e_1(V) \mathbf{E}_{\parallel}, \quad \mathbf{B}'_{\parallel} = b_1(V) \mathbf{B}_{\parallel} \quad (47)$$

e como as transformações inversas devem se ver iguais às diretas, concluímos que  $e_1 = 1 = b_1$ :

$$\mathbf{E}'_{\parallel} = \mathbf{E}_{\parallel}, \quad \mathbf{B}'_{\parallel} = \mathbf{B}_{\parallel} \quad (48)$$

A projeção transversal da transformação do campo elétrico é

$$\mathbf{E}'_{\perp} = \Gamma(\mathbf{E}_{\perp} + \kappa \mathbf{V} \times \mathbf{B}_{\perp}) \quad (49)$$

onde redefinimos os coeficientes  $e_2$  e  $e_3$ . É claro que  $\kappa$  deve ser igual a  $c^{-1}$ . Com efeito, uma carga em repouso em  $S'$  está submetida a uma força proporcional a  $\mathbf{E}'$ , enquanto que em  $S$  a força é proporcional a  $\mathbf{E} + c^{-1} \mathbf{V} \times \mathbf{B}$  (pois a carga se movimenta no sistema  $S$  com velocidade  $\mathbf{V}$ ). A anulação da força num sistema deve conduzir à anulação da força em qualquer outro sistema; mas isto só é possível se  $\kappa = c^{-1}$ .

Para descobrirmos o valor de  $\Gamma$  usamos novamente que as transformações inversa e direta devem ter a mesma forma, exceto pela mudança de  $\mathbf{V}$  por  $-\mathbf{V}$ :

$$\mathbf{E}'_{\perp} = \Gamma(\mathbf{E}_{\perp} + c^{-1} \mathbf{V} \times \mathbf{B}_{\perp}), \quad \mathbf{E}_{\perp} = \Gamma(\mathbf{E}'_{\perp} - c^{-1} \mathbf{V} \times \mathbf{B}'_{\perp}) \quad (50)$$

de onde resulta também que

$$\mathbf{B}'_{\perp} = \Gamma(\mathbf{B}_{\perp} - cV^{-2}(1 - \Gamma^{-2}) \mathbf{V} \times \mathbf{E}_{\perp}) \quad (51)$$

Para determinarmos o coeficiente  $\Gamma$  substituímos nestas transformações os campos correspondentes a uma onda plana se propagando na direção de  $\mathbf{V}$ . Uma onda plana é plana em qualquer referencial inercial (os campos dependem linearmente das coordenadas, e as transformações de Lorentz das coordenadas são lineais). Além disso, sabemos que se a onda se propaga na direção de  $\mathbf{V}$ ,

então ela não sofre aberração (na equação (29),  $\theta = 0 \implies \theta' = 0$ ). Como as leis de Maxwell devem ser válidas em qualquer referencial inercial, então tanto em  $S$  como em  $S'$  a onda plana será caracterizada por

$$\mathbf{B} = \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}, \quad \mathbf{B}' = \hat{\mathbf{n}}' \times \mathbf{E}' \quad (52)$$

No nosso caso  $\hat{\mathbf{n}} = \mathbf{V}/V = \hat{\mathbf{n}}'$ , e substituindo nas transformações resulta

$$\mathbf{E}'_{\perp} = \Gamma(1 - c^{-1}V)\mathbf{E}_{\perp}, \quad \mathbf{E}_{\perp} = \Gamma(1 + c^{-1}V)\mathbf{E}'_{\perp} \quad (53)$$

Multiplicando escalarmente estas duas equações obtemos  $\Gamma = \gamma(V)$ . Em suma, as transformações de Lorentz das componentes transversais dos campos são

$$\mathbf{E}'_{\perp} = \gamma(V)(\mathbf{E}_{\perp} + c^{-1}\mathbf{V} \times \mathbf{B}_{\perp}), \quad \mathbf{B}'_{\perp} = \gamma(V)(\mathbf{B}_{\perp} - c^{-1}\mathbf{V} \times \mathbf{E}_{\perp}) \quad (54)$$

**Exercício:** *Mostre que  $E^2 - B^2$  e  $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$  são invariantes.*

**Transformações das densidades de carga e corrente.** O método mais direto para se transformar as fontes de campo consiste em procurarmos por uma configuração simples de fontes e obtermos as transformações das fontes a partir das transformações dos campos. Consideremos uma lâmina de espessura  $d$  no plano  $x - y$ , carregada uniformemente com densidade  $\rho$  e percorrida por uma corrente uniforme  $\mathbf{j} = j_x \hat{\mathbf{x}} + j_y \hat{\mathbf{y}}$ . De acordo com as leis de Maxwell, os campos são uniformes fora da lâmina, e seus valores no semiespaço  $z > 0$  são:

$$\mathbf{E} = 2\pi\rho d \hat{\mathbf{z}}, \quad \mathbf{B} = 2\pi c^{-1} j_x d \hat{\mathbf{x}} - 2\pi c^{-1} j_y d \hat{\mathbf{y}} \quad (55)$$

Num sistema  $S'$  que se movimenta ao longo do eixo  $x$  em relação a  $S$ , a distribuição de carga e corrente é qualitativamente similar graças ao tipo de configuração de fontes escolhido, e as leis de Maxwell são igualmente válidas, de modo que:

$$\mathbf{E}' = 2\pi\rho' d' \hat{\mathbf{z}}', \quad \mathbf{B}' = 2\pi c^{-1} j'_x d' \hat{\mathbf{x}}' - 2\pi c^{-1} j'_y d' \hat{\mathbf{y}}' \quad (56)$$

Alem disso,  $d = d'$ , pois os comprimentos transversais à direção do movimento relativo não mudam. Então substituindo estes valores dos campos nas transformações (48) e (54) obtemos

$$\rho' = \gamma(V)(\rho - c^{-2}V j_x), \quad j'_{\parallel} = \gamma(V)(j_{\parallel} - V\rho), \quad j'_{\perp} = j_{\perp} \quad (57)$$

---

**Exercício:** *Demonstre que a carga elétrica contida num elemento de volume é invariante. Ajuda: comece por avaliar a carga no sistema onde ela se encontra em repouso, e logo após faça a transformação para um referencial arbitrário.*

**Exercício:** *Utilize a transformação dos campos para demonstrar que a força de Lorentz  $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + c^{-1}\mathbf{u} \times \mathbf{B})$  sobre uma carga  $q$  (invariante) se transforma de acordo com:*

$$\mathbf{F}'_{\parallel} = \frac{\mathbf{F}_{\parallel} - c^{-2}V \mathbf{F} \cdot \mathbf{u}}{1 - c^{-2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{V}}, \quad \mathbf{F}'_{\perp} = \frac{\gamma(V)^{-1} \mathbf{F}_{\perp}}{1 - c^{-2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{V}} \quad (58)$$

**Exercício:** *Comprove que  $d\mathbf{p}/dt$  se transforma analogamente a (58).*

**Exercício:** *Resolva a questão sobre os fios paralelos formulada na Seção 1.*

**Exercício:** *Utilize a transformação dos campos para demonstrar que os potenciais  $\phi$ ,  $\mathbf{A}$  se transformam de acordo com:*

$$\phi' = \gamma(V)(\phi - c^{-1}V A_x), \quad \mathbf{A}'_{\parallel} = \gamma(V)(\mathbf{A}_{\parallel} - c^{-1}\mathbf{V}\phi), \quad A'_{\perp} = A_{\perp} \quad (59)$$


---

## 5 Quadri-tensores

Do mesmo modo que a linguagem vetorial é a mais adequada para formular enunciados que são invariantes sob rotações espaciais, existe uma linguagem matemática natural para se enunciar relações matemáticas que são invariantes não só sob rotações espaciais, mas sob transformações do grupo de Lorentz em geral. Essa é a linguagem quadri-vetorial desenvolvida por Minkowski. Chamamos de quadri-vetor contravariante qualquer objeto  $A^j$  formado por uma grandeza  $A^0$  invariante sob rotações e um vetor  $\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z)$ ,

$$A^j = (A^0, A^1, A^2, A^3) = (A^0, \mathbf{A}) \quad (60)$$

que sob transformações de Lorentz se transforme como o quadri-vetor  $x^j$  formado pelas coordenadas de um evento:

$$x^0 \equiv ct, \quad x^1 \equiv x, \quad x^2 \equiv y, \quad x^3 \equiv z, \quad (61)$$

Chamamos de  $\Lambda^{j'}$  aos coeficientes da transformação de Lorentz que leva de  $S$  em  $S'$ . Por exemplo, se a transformação é um *boost* (transformação de Lorentz

sem rotação espacial de eixos cartesianos) ao longo do eixo  $x$ , então a matriz  $\Lambda_j^{j'}$  é

$$\Lambda_j^{j'} = \begin{pmatrix} \gamma(\beta) & -\gamma(\beta)\beta & 0 & 0 \\ -\gamma(\beta)\beta & \gamma(\beta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (62)$$

onde  $\beta = V/c$ . Usando a *convenção de Einstein* (soma sobre pares de índices inferiores e superiores iguais), a transformação de um quadri-vetor contravariante é escrita

$$A^{j'} = \Lambda_j^{j'} A^j \quad (63)$$

**Exercício:** *Mostre que o quadri-volume  $d^4x$  é invariante sob transformações do grupo de Lorentz (calcule o Jacobiano da transformação de coordenadas).*

Já conhecemos vários quadri-vetores contravariantes:

|                             |       |   |
|-----------------------------|-------|---|
| coordenadas de um evento    | $x^j$ | $(ct, \mathbf{r})$                              |
| energia-momento             | $p^j$ | $(c^{-1}E, \mathbf{p})$                         |
| quadri-vetor de onda        | $k^j$ | $2\pi(c^{-1}\nu, \lambda^{-1}\hat{\mathbf{n}})$ |
| densidade de carga-corrente | $j^j$ | $(c\rho, \mathbf{j})$                           |
| potencial eletromagnético   | $A^j$ | $(\phi, \mathbf{A})$                            |

Podemos gerar outros quadri-vetores multiplicando um quadri-vetor por um invariante. Por exemplo, sejam  $x^j = x^j(\tau)$  as equações paramétricas da linha de universo de uma partícula em função do seu tempo próprio (o invariante tempo próprio ao longo da linha de universo da partícula é  $\tau = \int d\tau = \int \gamma(u)^{-1} dt = \int c^{-1} ds$ , veja-se nota de pé de página na Seção 3). Então definimos uma *quadri-velocidade*:

$$U^j \equiv \frac{dx^j(\tau)}{d\tau} = \left( \frac{c dt}{d\tau}, \frac{d\mathbf{r}}{d\tau} \right) = \gamma(u)(c, \mathbf{u}) \quad (64)$$

Podemos ver que

$$p^j = m U^j \quad (65)$$

Usando novamente a relação  $d\tau = \gamma(u)^{-1} dt$  construímos a derivada de  $p^j$  em relação a  $\tau$  (ao longo da linha de universo da partícula):

$$\frac{dp^j}{d\tau} = \gamma(u) \left( c^{-1} \frac{dE}{dt}, \frac{d\mathbf{p}}{dt} \right); \quad (66)$$

e definimos a quadri-força (vejam-se as equações (40) e (41))

$$K^j \equiv \gamma(u) (c^{-1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{u}, \mathbf{F}) \quad (67)$$

Chamamos de quadri-vetor covariante todo objeto de componentes cartesianas  $C_j$  que se transforma com os coeficientes da matriz inversa de  $\Lambda^j_{j'}$ . Note-se que usamos índices superiores para indicarmos o caracter contravariante de um quadri-vetor, enquanto usamos índices inferiores para indicar seu caracter covariante. A matriz inversa de  $\Lambda^j_{j'}$  é aquela matriz que composta com esta tem como resultado a matriz identidade. No caso de uma transformação de Lorentz a matriz inversa nada mais é do que a correspondente à transformação que retorna de  $S'$  a  $S$ ; então faremos bem em chamá-la de  $\Lambda^j_{j'}$ :

$$\Lambda^{j'}_j \Lambda^j_{k'} = \delta^{j'}_{k'}, \quad \Lambda^j_{j'} \Lambda^{j'}_k = \delta^j_k \quad (68)$$

A transformação que define um quadri-vetor covariante é então

$$C_{j'} = C_j \Lambda^j_{j'} \quad (69)$$

Este comportamento garante que uma combinação (*contração*) do tipo  $C_j A^j$  é invariante (independente do referencial):

$$C_{j'} A^{j'} = C_{j'} \Lambda^{j'}_j A^j = C_j A^j \quad (70)$$

As derivadas parciais cartesianas compõem um quadri-vetor covariante que chamamos de gradiente  $\partial_j \equiv \partial / \partial x^j$ . Com efeito

$$\partial_{j'} = \frac{\partial}{\partial x^{j'}} = \frac{\partial}{\partial x^j} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} = \partial_j \Lambda^j_{j'} \quad (71)$$

A quadri-divergência de  $A^j$ ,  $\partial_j A^j = c^{-1} \partial A^0 / \partial t + \nabla \cdot \mathbf{A}$ , é então um invariante.

A título de exemplo, note-se que a equação de continuidade  $\partial \rho + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0$  -que expressa a conservação local da carga elétrica- se escreve  $\partial_i j^i = 0$ . Como  $\partial_i j^i$  é invariante sob transformações do grupo de Lorentz, então fica garantido que a equação de continuidade seja satisfeita em qualquer referencial. Este é um primeiro exemplo para mostrarmos que a linguagem quadri-vetorial é a linguagem natural para se escrever leis físicas que mantenham sua forma quando se passa de um referencial inercial a outro mediante transformações do grupo de Lorentz (boosts e rotações espaciais). Isto quer dizer que a formulação covariante das leis físicas automaticamente manifesta o cumprimento do Princípio da relatividade sob transformações de Lorentz.



Em geral chamamos de quadri-tensor todo objeto cujas componentes cartesianas são identificadas por  $r$  índices contravariantes e  $s$  índices covariantes, e que sob transformações do grupo de Lorentz mudam de acordo com

$$T^{i'j'\dots}_{k'l'm'\dots} = \Lambda^{i'}_i \Lambda^{j'}_j T^{ij\dots}_{klm\dots} \Lambda^k_{k'} \Lambda^l_{l'} \Lambda^m_{m'} \dots \quad (72)$$

A multiplicação de quadri-tensores resulta em quadri-tensores com maior quantidade de índices (*produto tensorial*):

$$T^{ijkl}_{mnp} = O B^{ij} C_m D^k_{np} E^l \quad (73)$$

( $O$  é um invariante). Em particular,  $\partial_m D^j_{np}$  é um quadri-tensor. A contração de índices (70) é generalizada para qualquer par de índices covariante-contravariante de um quadri-tensor, e tem como resultado outro tensor com menor quantidade de índices:

$$T^{ijkl}_{knp} = M^{ijl}_{np} \quad (74)$$

**Exercício:** *Demonstre que as quantidades definidas nas equações (73) e (74) se transformam como componentes de um quadri-tensor.*

Toda lei física que se escreva como um quadri-tensor igualado a zero (ou, o que é igual, um quadri-tensor igualado a outro quadri-tensor) automaticamente satisfaz o Princípio da relatividade sob transformações de Lorentz porque, como mostra a transformação (72), se um quadri-tensor é zero num referencial, ele é zero em qualquer outro referencial.

**Produto escalar de quadri-vetores. Tensor métrico.** Como sabemos, as componentes de um quadri-vetor contravariante  $A^i$  permitem construir o invariante

$$A \cdot A \equiv A^{0^2} - A^{1^2} - A^{2^2} - A^{3^2} = A^{0^2} - |\mathbf{A}|^2 \quad (75)$$

Exemplos deste invariante são o intervalo e o invariante energia-momento. Outros invariantes deste tipo são  $k \cdot k = 0$  (para um raio de luz) e  $U \cdot U = c^2$  (para qualquer partícula). Os quadri-vetores são classificados em temporais ( $A \cdot A > 0$ ), espaciais ( $A \cdot A < 0$ ) e nulos ( $A \cdot A = 0$ ). O invariante (75) pode ser escrito

$$A \cdot A = g_{ij} A^i A^j \quad (76)$$

com ajuda do quadri-tensor simétrico

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (77)$$

Não há dúvida de que  $g_{ij}$  deve ter um comportamento quadri-tensorial, pois se assim não fosse, então a combinação (76) não seria invariante. Por outro lado, as componentes  $g_{ij}$  têm a forma (77) em qualquer referencial cartesiano pois o invariante  $A \cdot A$  tem a estrutura (75) em qualquer referencial cartesiano. O invariante  $A \cdot A$  pode se ver como um caso particular de produto escalar entre dois vetores contravariantes:

$$A \cdot B \equiv g_{ij} A^i B^j \quad (78)$$

motivo pelo qual o quadri-tensor  $g_{ij}$  recebe o nome de tensor métrico. Não obstante, devemos mencionar que o produto escalar (78) não é positivo definido: a geometria do espaço-tempo de Minkowski é pseudo-euclidiana. Um exemplo de produto escalar é a fase de uma onda plana,  $\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$ , que é o invariante  $k \cdot x$ .

**Exercício:** *Define-se a quadri-aceleração como  $\mathcal{A}^j \equiv dU^j/d\tau$ . Demonstre que a quadri-aceleração é espacial, e que  $U \cdot \mathcal{A} = 0$  (use  $U \cdot U = c^2$ ).*

Indicamos com  $g^{ij}$  as componentes do inverso do tensor métrico:

$$g^{ij} g_{jk} = \delta_k^i \quad (79)$$

É claro que as componentes  $g^{ij}$  coincidem com as  $g_{ij}$  (isto é próprio das geometrias euclidianas e pseudo-euclidianas). Com o tensor métrico e seu inverso podemos estabelecer uma correspondência biunívoca entre vetores covariantes e contravariantes:

$$A_i = g_{ij} A^j \quad \implies \quad A^j = g^{jk} A_k \quad (80)$$

quer dizer  $A_0 = A^0$ ,  $A_\alpha = -A^\alpha$  ( $\alpha = 1, 2, 3$ ), o que permite escrever o produto escalar em forma indistinta com vetores covariantes ou contravariantes:

$$A \cdot B = g_{ij} A^i B^j = A_j B^j = g^{jk} A_j B_k = A^k B_k \quad (81)$$

Podemos “subir” e “descer” índices de tensores de qualquer tipo. Por exemplo:

$$T^j_{klm} = g_{il} T^j_{k m}, \quad T^j_{k m} = g^{il} T^j_{klm} \quad (82)$$

Em particular, a equação (79) diz que  $g^i_j = \delta^i_j$ .

**Formulação covariante do eletromagnetismo.** Com as derivadas do quadri-potencial  $A^i = (\phi, \mathbf{A})$  construímos o quadri-tensor anti-simétrico

$$F_{ij} \equiv \partial_i A_j - \partial_j A_i \quad (83)$$

que chamamos de tensor de campo. Lembrando que  $\mathbf{E} = -\nabla\phi - c^{-1}\partial\mathbf{A}/\partial t$ ,  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ , resulta

$$F_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (84)$$

As leis do eletromagnetismo podem ser escritas em forma manifestamente covariante a partir do tensor de campo. As equações sem fontes,  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ ,  $c \nabla \times \mathbf{E} + \partial\mathbf{B}/\partial t = 0$  estão contidas em

$$\partial_i F_{jk} + \partial_j F_{ki} + \partial_k F_{ij} = 0 \quad (85)$$

Estas equações se reduzem a meras identidades se substituirmos os campos em função dos potenciais. As quatro equações com fontes,  $\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho$ ,  $c \nabla \times \mathbf{B} - \partial\mathbf{E}/\partial t = 4\pi\mathbf{j}$ , se expressam

$$-c \partial_j F^{ij} = 4\pi j^i \quad (86)$$

A equação de continuidade se deduz da equação anterior notando que  $\partial_i \partial_j F^{ij} \equiv 0$  (pois se trata da contração de um operador tensorial simétrico com um tensor anti-simétrico). A quadri-força (67) devida à força de Lorentz sobre uma carga  $q$ ,  $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + c^{-1} \mathbf{u} \times \mathbf{B})$ , e a força por unidade de volume sobre uma distribuição de carga e corrente,  $\mathbf{f} = \rho \mathbf{E} + c^{-1} \mathbf{j} \times \mathbf{B}$  estão associadas ao quadri-vetores

$$K^i = q c^{-1} F^i_j U^j = \gamma(u)(c^{-1} q \mathbf{E} \cdot \mathbf{u}, \mathbf{F}), \quad f^i = c^{-1} F^i_k j^k = (c^{-1} \mathbf{E} \cdot \mathbf{j}, \mathbf{f}) \quad (87)$$

Usando as equações de Maxwell demonstra-se que

$$f^i + \partial_j T^{ij} = 0 \quad (88)$$

onde  $T^{ij}$  é o tensor de energia-momento do campo eletromagnético,

$$T^{ij} = \frac{1}{4\pi} \left( -F^i_j F^{kj} + \frac{1}{4} g^{ik} F^{jl} F_{jl} \right) \quad (89)$$

A equação (88) expressa a conservação da energia e do momento de um sistema isolado de cargas e campo. Ela diz que  $c^{-1} T^{\alpha 0}$  ( $\alpha = 1, 2, 3$ ) é a densidade de momento do campo,  $T^{00}$  e  $c T^{0\beta}$  são a densidade de energia e o fluxo de energia (vetor de Poynting) do campo, e  $T^{\alpha\beta}$  são fluxos de momento do campo. A equação (89) mostra que  $T^{ij}$  é um tensor simétrico.

---

**Exercício:** Mostre que o tensor de campo é invariante sob uma transformação de calibre  $A_j \rightarrow A_j + \partial_j \chi(t, \mathbf{r})$ .

**Exercício:** A invariância de calibre pode ser aproveitada para escolhermos  $\chi(t, \mathbf{r})$  de maneira que a quadri-divergência de  $A_j$  seja nula ( $\partial_j A^j = 0$ , calibre de Lorentz). Mostre que nesse caso o quadri-potencial satisfaz a equação

$$g^{ij} \partial_i \partial_j A^k = 4\pi c^{-1} j^k, \quad (90)$$

onde  $g^{ij} \partial_i \partial_j = \partial^2 / \partial t^2 - \nabla^2$  é o operador d'Alembertiano.

---

### Agradecimentos

Agradeço ao Comitê Organizador da V Escola do CBPF pelo convite, e ao CBPF pela hospitalidade. Minha gratidão também para Diego Álvaro González, que traduziu estas notas.

### Bibliografia

- L.D. Landau e E.M. Lifshitz, *The Classical Theory of Fields*, London: Pergamon, 1971.
- C. Møller, *The Theory of Relativity*, Oxford: Clarendon Press, 1972.
- W. Rindler, *Relativity. Special, General and Cosmological*, N.Y.: Oxford University Press, 2001.
- E.F. Taylor e J.A. Wheeler, *Space-Time Physics*, San Francisco: Freeman, 1992.