SUPERSIMETRIA: DA MECÂNICA CLÁSSICA À MECÂNICA QUÂNTICA

(Supersymmetry: From classical mechanics to quantum mechanics)

R. de Lima Rodrigues*
Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas
Rua Dr. Xavier Sigaud, 150
CEP 22290-180, Rio de Janeiro-RJ, Brazil

Resumo

Apresentamos as notas de aula para o mini-curso com o título acima, a ser ministrado durante a IV Escola do Centro Brasileiro de Pesquisa Física, de 22 a 26 de julho de 2002. O conteúdo programático contém uma revisão sobre o método de fatorização em mecância quântica, a construção da mecânica clássica supersimétrica com supersimetria $N = 1$ e $N = 2$, usando o formalismo lagrangeano. Após analisarmos as principais características da supersimetria em mecânica quântica não-relativística, consideramos a aplicação do método supersimétrico para deduzirmos um potencial isoespectral com o átomo de Hidrogênio não-relativístico.

Typeset using REVTEX

*Permanente Endereço: Departamento de Ciências Exatas e da Natureza, UFCG-Universidade Federal de Campina Grande, Cajazeiras - PB, 58.900-000, Brazil. E-mail: rafaelr@cbpf.br or rafael@fisica.ufpb.br

I. INTRODUÇÃO

Iniciamos abordando as teorias clássica que descreve uma partícula no super-espaço e, em seguida, ivestigaremos a mecânica quântica [1] no contexto da supersimetria.

Partindo da super-partícula não-relativística construiremos a supersimetria em mecânica quântica (SUSI MQ) usando os formalismos lagrangeano e hamiltoniano. Iniciaremos com a supersimetria em mecânica clássica (SUSI MC) e implementaremos o procedimento de quantização canônica de Dirac [2], no contexto não-relativístico. Tal procedimento de quantização aplica-se a sistemas com vínculos de segunda classe.

A SUSI surgiu, na década de setenta, e logo em seguida alguns pesquisadores da linha de trabalhos sobre uma descrição unificada das teorias Físicas relutaram com a grande ambição de que a mesma fosse a teoria de grande unificação das quatro interações básicas existentes na natureza (forte, fraca, eletromagnética e gravitacional). Mas, após um grande número de trabalhos abordando a SUSI neste contexto, está faltando uma constatação experimental, para que a SUSI se torne uma teoria de unificação a altas energias, ou seja, uma Teoria Quântica de Campos consistente com a descrição da natureza. Não obstante, no momento há uma grande perspectiva da existência da SUSI em Física de altas energias.

Entretanto, após a formulação da SUSI MQ por Witten [3,4] e da SUSI MC [5–7], surgiram algumas evidências fenomenológicas a baixas energias, em mecânica quântica não-relativística supersimétrica [8]. Na referência [7] o leitor pode encontrar uma demonstração de que, no caso da SUSI MC com N=1 (uma variável de Grassmann) e uma única super-coordenada comutante, não podemos introduzir um termo de potencial na super-ação. A SUSI MQ tem sido aplicada principalmente como técnica de resolução espectral para potenciais invariantes de forma [9] e para se construir novos potenciais iso-espectrais em mecânica quântica [10]. Recentemente, um dos autores construiu uma nova classe de potenciais no contexto da mecânica quântica unidimensional e da teoria de campos bidimensional (1+1 dimensões) [11].

Os modelos hamiltonianos da SUSI MC $N = 1$ e $N = 2$ em (0+1) dimensão contêm vínculos [5], cuja primeira quantização via o método de Dirac foi efetivada por Barcelos *et al.* [12]. Recentemente, foi mostrada a conexão da SUSI MQ com: a álgebra de Wigner e Heisenberg super-realizada para os osciladores quânticos de Wigner, em termos de operadores bosônicos e fermiônicos [13,14]; a óptica quântica [15]; os superpotenciais singulares [16]; os potenciais não polinomiais [17], e com potenciais de fases equivalentes [18]. Gendenshtein e Krive [19] fizeram um excelente trabalho de revisão mostrando as aplicações da SUSI em Física quântica com potenciais invariantes de forma, Física estatística e Física nuclear. Eles abordaram também os aspectos de quebra da supersimetria e a conexão com a teoria de Gauge; completando a revisão, Lahiri, Roy e Bagchi [20] consideraram a quantização com vínculos de uma lagrangeana SUSI, e também as aplicações para os seguintes sistemas quânticos: o oscilador harmônico isotrópico, o átomo de hidrogênio e o potencial de Morse. Lahiri *et al* discutiram também a conexão da SUSI com o acoplamento de spin órbita. Citamos também um curso sobre a SUSI MQ e a para-supersimetria dinâmica, ministrado por Luc Vinet, na *V Escola de Verão Jorge André Swieca, seção: Teoria de Campos e Partículas* [21]. Há também o excelente trabalho de Haymaker e Rau mostrando entre outras aplicações, a conexão da SUSI com a partícula relativística de Dirac [22]. Há outro trabalho de revisão sobre SUSI em mecânica quântica, abordando entre outros tópicos, a construção de potenciais isoespectrais com o espectro de energia conhecido, por Cooper, Khare e Sukhatme [23]. Os trabalhos de revisão mais recente sobre o caso da mecância clássica da superpartícula livre com SUSI $N = 1$ e o caso da SUSI $N = 2$, com a aplicação para o potenticial de Pöschl-Teller I e um nêutron em um compo magnético de um condutor linear com corrente são encontrados, respectivamente, em [7] e [24].

Na construção de uma teoria SUSI usa-se as variáveis anti-comutantes (cujo quadrado é zero) denominadas de grassmannianas [26]. Para a superpartícula relativística no espaço-tempo quadridimensional de Minkowski ($D = 4 = (3 + 1)$, três dimensões espaciais e uma dimensão temporal), adotam-se etapas semelhantes ao procedimento que iremos considerar a seguir [27].

Este trabalho está organizado da seguinte maneira: na Seção II, apresentamos uma síntese do método de fatorização em mecânica quântica para o oscilador harmônico unidimensional [1]. Na Seção III, introduziremos algumas propriedades das variáveis de Grassmann e implementaremos a SUSI $N = 1$ e $N = 2$ em mecânica clássica. Na Seção IV, consideraremos a questão do vínculo de segunda classe na quantização da super-partícula e construiremos o modelo supersimétrico de Witten em mecânica quântica não-relativística. Na Seção V, deduziremos o potencial generalizado de Abraham-Mosese via o método SUSI. Na seção VI, elaboraremos as discussões e conclusões.

Esta nostas de aula é baseada no trabalho [4], acrescido parte dos trabalhos [1], [7] e [24]. Acrescentamos também a aplicação do método supersimétrico para deduzirmos o potencial generalizado de Abraham-Moses [25].

II. O OSCILADOR QUÂNTICO VIA O MÉTODO DE FATORIZAÇÃO

Vamos introduzir dois operadores não-hermitianos, a^- e a^+ definidos a partir da combinação linear dos operadores de posição e momento linear ($\hat{x}$ e $\hat{p}_x = -i\hbar\frac{d}{dx}$) [1]

$$a^- = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}}(\omega\hat{x} + i\hat{p}_x) \tag{1}$$

$$a^+ = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}}(\omega\hat{x} - i\hat{p}_x), \tag{2}$$

veremos na seção dos postulados que $\hat{p}_x^\dagger = \hat{p}_x \Rightarrow a^+ = (a^-)^\dagger$ e $a^- = (a^+)^\dagger$. Neste caso, diz-se que $a^\pm$ são operadores mutuamente adjuntos. Escrevendo $\hat{x}$ e $\hat{p}_x$ em termos de a^- e a^+, obtemos:

$$\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}}(a^+ + a^-) \tag{3}$$

$$\hat{p}_x = i\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2}}(a^+ - a^-), \tag{4}$$

onde a^- é chamado de operador de abaixamento e a^+ é o operador de levantamento dos autovalores de energia do oscilador harmônico simples (OHS).

Em segunda quantização, quando quantizamos o campo eletromagnético surgem operadores análogos aos operadores escadas ($a^{\pm}$) do OHS, mas eles fazem partes do campo e não são combinação lineares de $\hat{p}_x$ com $\hat{x}$. Em teorias de campos os operadores $a^{\pm}$ são denominados de operadores de criação e aniquilação.

Os operadores a^- e a^+ não comutam e satisfazem a seguinte relação de comutação:

$$[a^-, a^+] \equiv a^- a^+ - a^+ a^- = 1. \tag{5}$$

Essa expressão é bastante evidente a partir do momento que substituirmos as equações (3) e (4) no comutador $[\hat{x}, \hat{p}_x] = i\hbar$ e usarmos o fato de que todo operador comuta com ele mesmo.

Substituindo (3) e (4) no hamiltoniano do OHS, obtemos:

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2}(\hat{p}_x^2 + \omega^2 \hat{x}^2) \\ &= \frac{\hbar\omega}{2}(a^- a^+ + a^+ a^-) \\ &= \hbar\omega(a^+ a^- + \frac{1}{2}) \\ &= \hbar\omega a^+ a^- + E_0, \end{aligned} \tag{6}$$

onde a constante $E_0 = \frac{\hbar\omega}{2}$ é chamada de energia do ponto zero do oscilador associada ao estado fundamental (ou estado de menor energia). Estamos considerando o sistema de unidade em que $m = 1$. Lembre-se que em mecânica clássica, a energia mínima do oscilador é zero.

Um bom exercício, seria mostrar diretamente, escrevendo os operadores $a^{\pm}$ em termos de x e do operador derivada $\frac{d}{dx}$. Lembrando-se que os operadores atuam sobre as funções de onda, o leitor deve calcular os produtos dos operadores, neste caso, atuando-os sobre as autofunções unidimensionais. Calcula-se separadamente, $a^+ a^- \psi_n(x)$ e $a^- a^+ \psi_n(x)$ depois faz-se a adição obtendo, então, o hamiltoniano acima. Fazendo a subtração das duas equações resultantes desta operação, obtém-se a relação de comutação canônica acima (5).

Considerando a seguinte propriedade de comutador $[A, BC] = B[A, C] + [A, B]C$ e $[a^-, a^+] = 1$, obtemos duas relações de comutação importantes, a saber:

$$[H, a^-] = -a^-, \tag{7}$$

$$[H, a^+] = a^+. \tag{8}$$

Portanto,

$$Ha^- = a^-(H - 1), \tag{9}$$

$$Ha^+ = a^+(H + 1). \tag{10}$$

Neste estágio, devemos dizer que toda as vezes que tivermos equações desse tipo esses operadores $a^{\pm}$ serão interpretados como sendo os operadores de levantamento (a^+) e abaixamento (a_-) dos autovalores de energia do hamiltoniano.

Se $< 0 \mid 0 >$ é normalizado, então todos os outros também o serão.

Fica para o leitor verificar os seguintes resultados:

$$\begin{array}{c} H \mid n >= (n + \frac{1}{2}) \mid n >, \\ a^- \mid 0 >= 0, \\ a^- \mid n >= \sqrt{n} \mid n - 1 >, \\ a^+ \mid n >= \sqrt{n+1} \mid n + 1 >, \end{array} \tag{11}$$

onde $n = 1, 2, 3, \cdots$. A segunda equação é denominada de condição de aniquilação, a qual na representação x corresponde a uma equação diferencial de primeira ordem, cuja solução nos fornece a autofunção do estado fundamental.

Um resultado extremamente importante é obtido ao aplicarmos o operador a^+ sobre o ket do autoestado fundamental ($\mid 0 >$) n vezes. Disto construiremos o autoket $\mid n >$ associado ao n-ésimo estado excitado do OHS dado por:

$$\mid n >= c_n (a^+)^n \mid 0 >= \frac{(a^+)^n}{\sqrt{n!}} \mid 0 >, \quad c_n = \sqrt{\frac{1}{n!}}. \tag{12}$$

III. SUPERSIMETRIA EM MECÂNICA CLÁSSICA

Para a SUSI $N = 1$, com uma única supercoordenada comutante, não podemos introduzir um potencial $V(\phi)$, pois entre outros motivos levaria a não consistência da super-ação, tornando-a de dimensão ímpar [7]. Consideraremos a análise da superpartícula interagindo com uma energia potencial conservativa $U(\phi)$, a qual, no formalismo lagrangeano, é usual denominá-la simplesmente de potencial.

A. SUSI N=1

Consideramos a supersimetria $N = 1$, isto é, a SUSI com uma única variável anticomutante. A supersimetria em mecânica clássica unifica as coordenadas par $q(t)$ e ímpar $\psi(t)$ em um superespaço caracterizado pela introdução de uma variável grassmanniana Θ não mensurável [5,6,26].

$$\text{Superespaço} \rightarrow (t; \Theta), \qquad \Theta^2 = 0, \tag{13}$$

onde t e Θ atuam, respectivamente, como elementos par e ímpar da álgebra de Grassmann.

A coordenada anticomutante, Θ, parametriza todos os pontos do superespaço, mas toda a dinâmica será colocada na coordenada temporal, t. A SUSI MC é gerada por uma transformação de translação no superespaço,

$$\Theta \rightarrow \Theta' = \Theta + \epsilon, \qquad t \rightarrow t' = t + i\epsilon\Theta, \tag{14}$$

onde Θ e ϵ são variáveis grassmannianas reais,

$$[\Theta, \epsilon]_+ = \Theta\epsilon + \epsilon\Theta = 0 \Rightarrow (\Theta\epsilon)^* = (\epsilon^*\Theta^*) = (\epsilon\Theta) = -(\Theta\epsilon). \tag{15}$$

Esta operação asterisco do produto de duas variáveis grassmannianas (anticomutantes), nos assegura que tal produto é um imaginário puro e, por isso, coloca-se o $i = \sqrt{-1}$ em (22) para alcançar o caráter real do tempo. A SUSI é implementada de modo a deixar o elemento de linha invariante [1]:

$$dt + i\Theta d\Theta = \text{invariante}, \tag{16}$$

onde mais uma vez introduz-se o i para tornar o elemento de linha real.

A supercoordenada para $N = 1$, é expandida em uma série de Taylor em termos das coordenadas par $q(t)$ e ímpar $\psi(t)$:

$$\phi \equiv \phi(t;\Theta) = q(t) + i\Theta\psi(t). \tag{17}$$

Há a necessidade de definirmos a regra de derivação com respeito a uma variável grassmanniana. Aqui usamos a regra de derivada à direita, ou seja, sendo $f(\Theta_1, \Theta_2)$ uma função de duas variáveis anticomutantes, a regra da derivada à direita é a seguinte:

$$\delta f = \frac{\partial f}{\partial \Theta_1}\delta\Theta_1 + \frac{\partial f}{\partial \Theta_2}\delta\Theta_2, \tag{18}$$

onde $\delta\Theta_1$ e $\delta\Theta_2$ aparecem do lado direito das derivadas parciais.

Uma super-ação para a superpartícula livre pode ser escrita como uma integral dupla[2]

$$S = \frac{i}{2}\int\int dtd\Theta(D_\Theta\phi)\dot{\phi} = \frac{i}{2}\int\int dtd\Theta\{-i\psi\dot{q} - \Theta\psi\dot{\psi} - i\Theta\dot{q}^2\} \equiv \int dtL. \tag{19}$$

Após integrarmos na variável Θ, obtém-se a seguinte lagrangiana da superpartícula:

$$L = \frac{1}{2}\dot{q}^2 - \frac{i}{2}\psi\dot{\psi}, \tag{20}$$

onde o primeiro termo é a energia cinética associada à coordenada par e o segundo termo é a energia cinética associada à coordenada ímpar, para uma partícula sem energia potencial.

B. SUSI N=2

Assumiremos que a SUSI ocorre a $D = 1 = (0 + 1)$ com supersimetria estendida $N = 2$. Neste caso, teremos duas variáveis anticomutantes. Iniciaremos com o tratamento clássico e depois efetuaremos a primeira quantização via o método de quantização canônica com vínculos. Em geral, a SUSI com $N > 1$ é denominada de supersimetria estendida. No caso $N = 2$, o elemento de linha é dado por

---

[1] Aquelas propriedades das grandezas grassmannianas necessárias para uma melhor compreensão desta seção serão introduzidas gradativamente.

[2] Nesta seção sobre supersimetria em Mecânica Clássica usamos o sistema de unidades em que $m = 1 = \omega$, onde m é a massa da partícula e ω é a frequência angular.

$$dt - i\Theta_1 d\Theta_1 - i\Theta_2 d\Theta_2 = \text{ invariante}, (\text{Jacobiano} = 1), \tag{21}$$

o qual é invariante sob as seguintes transformações de translação no super-espaço:

$$\Theta_1 \rightarrow \Theta_1' = \Theta_1 + \epsilon_1, \quad \Theta_2 \rightarrow \Theta_2' = \Theta_2 + \epsilon_2, \quad t \rightarrow t' = t + i\epsilon_1\Theta_1 + i\epsilon_2\Theta_2, \tag{22}$$

onde ϵ_1 e ϵ_2 são grandezas anticomutantes (grassmannianas) e constantes reais. O "i" em (1) serve para garantir o caráter real do tempo.

As variáveis de Grassmann reais possuem as seguintes propriedades:

$$[\Theta_i, \Theta_j]_+ = \Theta_i\Theta_j + \Theta_j\Theta_i = 0 \Rightarrow (\Theta_1)^2 = 0 = (\Theta_2)^2. \tag{23}$$

Elas satisfazem as seguintes integrais de Berezin:

$$\int d\Theta\Theta = 1 \Rightarrow \sum_{i=1}^{2} \int d\Theta_i\Theta_i = 2, \qquad \int d\Theta_i = 0 = \partial_{\Theta_i} 1, (i = 1, 2), \tag{24}$$

onde ∂_{Θ_i} é a derivada parcial em relação a Θ_i. Vemos que a integral de Berezin atua como uma derivada. Além do mais, note que a derivada grassmanniana satisfaz a seguinte relação de anti-comutação:

$$[\partial_{\Theta_i}, \Theta_j]_+ = \partial_{\Theta_i}\Theta_j + \Theta_j\partial_{\Theta_i} = \delta_{ij}, \quad (i, j = 1, 2), \tag{25}$$

onde δ_{ij} é o delta de Kronecker, isto é, se $i = j \Rightarrow \delta_{ii} = 1$; se $i \neq j \Rightarrow \delta_{ij} = 0$.

De um modo geral, uma função de um conjunto de duas variáveis ímpares reais $(\Theta_\alpha, \alpha = 1, 2)$ pode ser definida pela seguinte expansão formal:

$$\begin{aligned} f(\Theta_\alpha) &= f_0 + \sum_{\alpha=1}^{2} f_\alpha\Theta_\alpha + f_3\Theta_1\Theta_2 \\ \delta f &= \sum_{\alpha=1}^{2} \frac{\partial f}{\partial\Theta_\alpha}\delta\Theta_\alpha. \end{aligned} \tag{26}$$

Note que na segunda equação acima $\delta\Theta_\alpha$ está atuando pelo lado direito, o que denomina-se de regra de derivada à direita. Quando $\delta\Theta_\alpha$ atuar pelo lado esquerdo da derivada parcial, chama-se de regra de derivada à esquerda. Neste trabalho, estamos adotando a regra de derivada à direita, ou seja: $\partial_{\Theta_1}(\Theta_2\Theta_1) = \Theta_2, \quad \partial_{\Theta_1}(\Theta_1\Theta_2) = -\Theta_2$.

As variáveis de Grassmann muitas vezes simplificam os cálculos. Por exemplo, a exponencial de Θ_1 resulta exatamente na soma da unidade com Θ_1. Definindo as coordenadas grassmannianas complexas Θ e $\bar{\Theta}$ (o conjugado complexo de Θ) em termos das variáveis anticomutantes reais, $\Theta_i (i = 1, 2)$ e os parâmetros (constantes) grassmannianos ϵ_i,

$$\begin{aligned} \Theta &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\Theta_1 - i\Theta_2), \\ \bar{\Theta} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\Theta_1 + i\Theta_2), \\ \epsilon &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\epsilon_1 - i\epsilon_2), \\ \bar{\epsilon} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\epsilon_1 + i\epsilon_2), \end{aligned} \tag{27}$$

a transformação SUSI torna-se:

$$\Theta \to \Theta' = \Theta + \epsilon, \qquad \bar\Theta \to \bar\Theta' = \bar\Theta + \bar\epsilon, \qquad t \to t' = t - i(\bar\Theta\epsilon - \bar\epsilon\Theta). \tag{28}$$

Neste caso, obtêm-se as seguintes relações de anti-comutações:

$$[\partial_\Theta, \Theta]_+ = 1, \quad [\partial_{\bar\Theta}, \bar\Theta]_+ = 1, \quad \Theta^2 = 0. \tag{29}$$

A expansão de Taylor para a supercoordenada escalar real de natureza comutante, em termos de Θ e $\bar\Theta$, pode ser escrita como:

$$\phi(t;\Theta,\bar\Theta) = q(t) + i\bar\Theta\psi(t) + i\Theta\bar\psi(t) + \Theta\bar\Theta A(t). \tag{30}$$

A partir da lei de tranformação infinitesimal desta supercoordenada, a saber,

$$\begin{aligned}\delta\phi &= \phi(t';\Theta',\bar\Theta') - \phi(t;\Theta,\bar\Theta)\\ &= \partial_t\phi\delta t + \partial_\Theta\phi\delta\Theta + \partial_{\bar\Theta}\phi\delta\bar\Theta\\ &= (\bar\epsilon Q + \bar Q\epsilon)\phi,\end{aligned} \tag{31}$$

onde $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$ e os geradores da SUSI,

$$Q \equiv \partial_{\bar\Theta} - i\Theta\partial_t, \quad \bar Q \equiv -\partial_\Theta + i\bar\Theta\partial_t, \tag{32}$$

(a supercarga $\bar Q$ não é o complexo conjugado da supercarga Q), obtemos as respectivas leis para as componentes bosônicas (pares) $(q(t); A)$ e fermiônicas (ímpares) $(\psi(t), \bar\psi(t))$:

$$\delta q(t) = i\{\epsilon\bar\psi(t) + \bar\epsilon\psi(t)\}, \qquad \delta A = \epsilon\dot{\bar\psi}(t) - \bar\epsilon\dot\psi(t) = \frac{d}{dt}\{\epsilon\bar\psi - \bar\epsilon\psi), \tag{33}$$

$$\delta\psi(t) = -\epsilon\{\dot q(t) - iA\}, \qquad \delta\bar\psi(t) = -\bar\epsilon\{\dot q(t) + iA\}, \tag{34}$$

as quais misturam-se como no caso da SUSI N=1 [7]. Obtemos estas leis de transformação comparando a lei SUSI em sua forma infinitesimal, dada pela equação (31), com a variação $(\delta\phi)$ obtida diretamente da supercoordenada, isto é, $\delta\phi = \delta q(t) + i\bar\Theta\delta\psi + i\Theta\delta\bar\psi + \Theta\bar\Theta\delta A(t)$. A super-ação mais geral com SUSI $N = 2$, invariante sob estas transformações, no superespaço $(\Theta, \bar\Theta; t)$ e de dimensão par, é definida pela seguinte integral tripla:

$$S[\phi] = \int\int\int dt d\bar\Theta d\Theta\{\frac{1}{2}(D\phi)(\bar D\phi) - U(\phi)\}, \qquad \bar D \equiv \partial_\Theta + i\bar\Theta\partial_t, \tag{35}$$

onde D é a derivada covariante $(D = -\partial_{\bar\Theta} - i\Theta\partial_t)$, $\bar\partial_{\bar\Theta} = -\partial_\Theta$, e $(\partial_{\bar\Theta} = \frac{\partial}{\partial\bar\Theta}$ e $\partial_\Theta = \frac{\partial}{\partial\Theta})$, construída de modo que $[D, Q]_+ = 0 = [\bar D, \bar Q]_+$ e $U(\phi)$ é uma função polinomial da supercoordenada. A SUSI MC é um jogo de convenções, pois poderíamos ter construído outras derivadas covariantes anti-comutantes com as respectivas supercargas. As derivadas covariantes da supercoordenada $\phi = \phi(\Theta, \bar\Theta; t)$ resultam em

$$\begin{aligned}\bar D\phi &= (\partial_\Theta + i\bar\Theta\partial_t)\phi = -i\bar\psi - \bar\Theta A + i\bar\Theta\partial_t q + \Theta\bar\Theta\dot{\bar\psi},\\ D\phi &= (-\partial_{\bar\Theta} - i\Theta\partial_t)\phi = i\psi - \Theta A - i\Theta\dot q + \Theta\bar\Theta\dot\psi\\ (D\phi)(\bar D\phi) &= \psi\bar\psi - \bar\Theta(\psi\dot q - iA\psi) + -\Theta(iA\bar\psi + \bar\psi\dot q)\\ &+ \Theta\bar\Theta\left(\dot q^2 + A^2 + i\psi\dot{\bar\psi} + i\dot\psi\bar\psi\right).\end{aligned} \tag{36}$$

Expandindo em série de Taylor o potencial $U(\phi)$ e mantendo até a primeira ordem em $\Theta\bar{\Theta}$ (porque somente estes termos sobrevivem após integrarmos nas variáveis garssmannianas complexas Θ e $\bar{\Theta}$), obtemos:

$$\begin{aligned} U(\phi) &= \phi U'(\phi) + \frac{\phi^2}{2}U''(\phi) + \cdots \\ &= A\Theta\bar{\Theta}U'(\phi) + \frac{1}{2}\psi\bar{\psi}\bar{\Theta}\Theta U'' + \frac{1}{2}\bar{\psi}\psi\Theta\bar{\Theta}U'' + \cdots \\ &= \Theta\bar{\Theta}\{AU' + \bar{\psi}\psi U''\} + \cdots, \end{aligned} \tag{37}$$

onde as derivadas (U' e U'') são tomadas a $\Theta = 0 = \bar{\Theta}$, de modo que resultam-nos em funções exclusivamente da coordenada par $q(t)$. Substituindo esta expansão de U(ϕ) e as derivadas covariantes $\bar{D}\phi$ e $D\phi$ vemos que a super-ação e a lagrangeana com SUSI N=2 em termos das componentes da supercoordenada ϕ tornam-se:

$$S[q;\psi,\bar{\psi}] = \frac{1}{2}\int \left\{\dot{q}^2 + A^2 - i\dot{\psi}\bar{\psi} + i\psi\dot{\bar{\psi}} - 2AU'(q) - 2\bar{\psi}\psi U''(q)\right\} dt \equiv \int L dt, \tag{38}$$

onde temos efetivado as integrais sobre as variáveis de Grassmann. Note que, a componente bosônica A não é uma variável dinâmica, pois, não existe nenhum termo na lagrangeana contendo derivada temporal dela! Neste caso, usando a equação de Euler-Lagrange para A,

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \partial_t A} - \frac{\partial L}{\partial A} = A - U'(q) = 0 \Rightarrow A = U'(q), \tag{39}$$

o que nos permite uma representação da lagrangeana sem depender de A. Por isso, esta componente é denominada de componente auxiliar. Em geral isto ocorre com a componente que aparece no termo de maior ordem da expansão da supercoordenada $[\phi(t;\Theta^\alpha)]$ nas variáveis anticomutantes Θ e $\bar{\Theta}$. De (39) em (38), é fácil de ver que a lagrangeana SUSI pode ser escrita como

$$L = \frac{1}{2}\left\{\dot{q}^2 - 2\left(U'(q)\right)^2 - 2U''(q)\bar{\psi}\psi - i(\dot{\psi}\bar{\psi} + \psi\dot{\bar{\psi}})\right\}. \tag{40}$$

Esta lagrangeana é a mesma obtida através da regra de derivada à esquerda. Ela descreve uma partícula supersimétrica não-relativística, onde $q = q(t)$ é a variável bosônica, $\psi = \psi(t)$ é a variável fermiônica, $\bar{\psi} = \psi^\dagger$ e $\dot{\psi} = \frac{d\psi(t)}{dt}$. Devemos enfatizar também que $\psi, \bar{\psi}$ e $\dot{\psi}$ não são operadores, mas são variáveis clássicas fermiônicas satisfazendo à álgebra de Grassmann ($\psi\psi = \bar{\psi}\bar{\psi} = \dot{\psi}\dot{\psi} = 0, \quad \psi\bar{\psi} = -\bar{\psi}\psi, \quad \psi\dot{\psi} = -\dot{\psi}\psi$ e $\dot{\psi}\bar{\psi} = -\bar{\psi}\dot{\psi}$).

Por construção, a hamiltoniana canônica da SUSI $N = 2$ é dada por:

$$H_c = \dot{q}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} + \frac{\partial L}{\partial(\partial_t\psi)}\dot{\psi} + \frac{\partial L}{\partial(\partial_t\bar{\psi})}\dot{\bar{\psi}} - L = \frac{1}{2}\left\{p^2 + \Big(U'(q)\Big)^2 + U''(q)[\bar{\psi},\psi]_-\right\}, \tag{41}$$

a qual contém um termo de potencial misto, composto de uma função da variável dinâmica de posição da partícula ($U''(q)$) e de variáveis de Grassmann ($[\bar{\psi},\psi]_-$). Após a quantização desta hamiltoniana veremos que este termo de potencial misto nos proporcionará a interação SUSI MQ, envolvendo uma parte bosônica e uma parte fermiônica.

IV. MECÂNICA QUÂNTICA SUPERSIMÉTRICA

A. Quantização Canônica no Super-Espaço

A supersimetria em mecânica quântica, formulada inicialmente por Witten [3], pode ser alcançada pela primeira quantização da hamiltoniana canônica acima. Mas, devemos tomar certos cuidados ao se implementar o procedimento de quantização canônica, pois há vínculos embutidos neste modelo [5,12]. Salomonson *et al*, F.Cooper et al e Ravndal não consideraram os vínculos [6]. No entanto, eles fizeram uma escolha adequada para a representação dos operadores fermiônicos correspondentes as coordenadas ímpares anti-comutantes $\bar{\psi}$ e ψ. A questão de tais vínculos foi abordada através do método de Dirac [2] por Barcelos *et al* [12]. Eles mostraram que a primeira quantização pode ser implementada consistentemente, no formalismo de supercoordenada, via o procedimento de quantização canônica de Dirac. De acordo com o método de Dirac, os parênteses de Poisson $\{A, B\}$ devem ser substituídos por parênteses de Poisson modificados (denominados de parênteses de Dirac) $\{A, B\}_D$, os quais entre duas variáveis dinâmicas A e B são dados por:

$$\{A, B\}_D = \{A, B\} - \{A, \Gamma_i\}C^{-1}_{ij}\{\Gamma_j, B\} \tag{42}$$

onde Γ_i denotam os vínculos de segunda classe. Estes vínculos têm os parênteses de Poisson não-nulos que definem a matriz C

$$C_{ij} \simeq \{\Gamma_i, \Gamma_j\}, \tag{43}$$

que Dirac mostrou ser anti-simétrica e não-singular e, portanto, inversível. Seguindo esta técnica obtém-se [12]:

$$\{q, \dot{q}\}_D = 1, \qquad \{\psi, \bar{\psi}\}_D = i \qquad \text{e} \qquad \{A, \dot{q}\}_D = \frac{\partial^2 U(q)}{\partial q^2}. \tag{44}$$

Todos os demais parênteses de Dirac são nulos. Na próxima etapa, implememtaremos o procedimento de quantização canônica. Em tal procedimento, devemos substituir os parênteses de Dirac por comutador ou anticomutador. De acordo com o *teorema de spin-estatística*, os operadores bosônicos satisfazem a relação de comutação e os operadores fermiônicos satisfazem a relação de anticomutação. Conseqüentemente, denotamos $\hat{q}$ e $\hat{\psi}$ como sendo os operadores bosônico e fermiônico, respectivamente, em mecânica quântica, correspondentes as variáveis clássicas q e ψ. Neste caso, efetuamos as substituições dos parênteses de Dirac pelo seguinte comutador e anticomutador:

$$\begin{aligned}
&\{q, \dot{q}\}_D = 1 \to \frac{1}{i}[\hat{q}, \dot{\hat{q}}]_- = 1 \quad \Rightarrow [\hat{q}, \dot{\hat{q}}]_- = \hat{q}\dot{\hat{q}} - \dot{\hat{q}}\hat{q} = i,\\
&\{\psi, \bar{\psi}\}_D = i \to \frac{1}{-i}[\hat{\psi}, \hat{\bar{\psi}}]_+ = i \Rightarrow [\hat{\psi}, \hat{\bar{\psi}}]_+ = \hat{\psi}\hat{\bar{\psi}} + \hat{\bar{\psi}}\hat{\psi} = 1.
\end{aligned} \tag{45}$$

Note que, após a substituição das variáveis clássicas por operadores preservamos o que foi obtido, ou seja, o lado direito da equação (44) não deve ser alterado. Vale a pena salientar que, na referência [12], aparece um sinal negativo no parêntese de Dirac para as variáveis fermiônicas, ou seja, $\{\psi, \bar{\psi}\}_D = -i$. Isto aconteceu porque eles usaram a regra de derivação à esquerda. Além do mais, note que o parêntese de Dirac é não nulo, enquanto que o parêntese de Poisson é fracamente nulo, o que é denotado por

$$\{\psi, \bar{\psi}\} \approx 0, \tag{46}$$

e, por sua vez, não tem correspondência com o anticomutador. Por isso, foi necessário a implementação do método de quantização de Dirac. No caso da referência [12], o parêntese de Dirac deve ser substituído pelo seguinte anticomutador: $\frac{1}{i}[\hat{\psi}, \hat{\bar{\psi}}]_+$. A representação matricial dos operadores fermiônicos serão as mesmas consideradas na próxima subseção.

Devemos dizer que o objetivo principal deste trabalho não é analisar os aspectos da quantização de sistemas com vínculos, mas entendemos que foi necessário a síntese apresentada nesta seção. Para maiores detalhes sugerimos ao leitor buscar subsídios nas referências citadas em [5,12].

B. O Modelo SUSI de Witten

Nesta subseção veremos o efeito dos vínculos sobre a hamiltoniana canônica na versão quantizada. A representação fundamental dos operadores fermiônicos, em $D = 1 = (0 + 1)$ é dada por:

$$\hat{\psi} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \hat{\bar{\psi}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow [\hat{\psi}, \hat{\bar{\psi}}]_+ = 1_{2\times 2}, \qquad [\hat{\bar{\psi}}, \hat{\psi}]_- = \sigma_3, \tag{47}$$

onde σ_3 é a matriz (diagonal de Pauli) com os elemetos 1 e -1 na diagonal principal. Por outro lado, na representação de coordenada, os operadores de posição e de momento linear satisfazem à relação de comutação canônica ($[\hat{x}, \hat{p}_x]_- = i$) e têm as seguintes representações:

$$\hat{x} \equiv \hat{q}(t) = x(t), \qquad \hat{p}_x = m\dot{x}(t) = -i\hbar\frac{d}{dx} = -i\frac{d}{dx}, \quad \hbar = 1. \tag{48}$$

Substituindo (47) em (41), e definindo

$$W(x) \equiv U'(x) \equiv \frac{dU}{dx}, \tag{49}$$

a hamiltoniana canônica torna-se o seguinte operador matricial, denominado de modelo hamiltoniano de Witten [3]:

$$\hat{H} = -\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}\{W^2(x) + W'(x)\sigma_3\} = \begin{pmatrix} H_- & 0 \\ 0 & H_+ \end{pmatrix}, \tag{50}$$

onde o setor de hamiltoniano (H_-) pode ser colocado em termos de operadores diferenciais de primeira ordem (mutuamente adjuntos, isto é, $A^+ = (A^-)^\dagger, \quad A^- = (A^+)^\dagger$), a saber,

$$H_- = -\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} + V_- = A^+A^- \tag{51}$$

e o seu companheiro supersimétrico H_+ é definido por

$$
\begin{aligned}
H_+ &= -\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} + V_+ = A^- A^+, \\
V_\mp &= \frac{1}{2}\left\{W^2(x) \mp W'(x)\right\}, \\
A^\pm &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\pm\frac{d}{dx} + W(x)\right\}.
\end{aligned} \tag{52}
$$

Vemos que devido a existência de vínculos obtém-se o hamiltoniano SUSI com um termo de potencial matricial, envolvendo a matriz diagonal de Pauli, ou seja, o método de quantização de sistema hamiltoniano com vínculos nos assegura a existência de operadores fermiônicos no hamiltoniano SUSI MQ.

Estes modelos de potenciais $V_\pm$ são iso-espectrais, cujas degenerescências fornece a supersimetria em mecânica quântica. Eles foram introduzidos na literatura, pela primeira vez, por Witten [3]. A partir desta forma fatorada de $H_\pm$ é fácil verificar que estes hamiltonianos possuem a mesma energia, a menos de um autovalor de energia pertencente ao nível mais baixo (estado fundamental).

Agora, considerando a equação de autovalor para H_-

$$
H_- \mid \psi >_- = E_- \mid \psi >_- \tag{53}
$$

e notando que

$$
H_+ A^- = A^- H_- \tag{54}
$$

obtemos

$$
H_+(A^- \mid \psi >_-) = E_-(A^- \mid \psi >_-). \tag{55}
$$

Esta equação de autovalor para H_+ nos assegura que $(A^- \mid \psi >_-)$ é uma autofunção de H_+ associada ao mesmo autovalor de energia E_- de H_-. Assumindo que A^- aniquila a função de onda normalizável que descreve o estado fundamental de H_-,

$$
A^- \psi_-^{(o)} = 0, \quad E_-^{(0)} = 0, \tag{56}
$$

obtém-se o seguinte mapeamento entre os autovalores de energia $E_\pm$ de $H_\pm$:

$$
E_+^{(n)} = E_-^{(n+1)}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots . \tag{57}
$$

Vemos que todos os níveis de energia dos hamiltonianos $H_\pm$ são degenerados, com exceção do estado fundamental não degenerado de H_- associado ao autovalor de energia zero.

Por que a denominação de superpotencial? A função $W(x)$ é chamada de superpotencial, devido as seguintes interpretações: $W^2(x)$ representa a interação entre bóson-bóson, e $W'(x)\sigma_3$ representa a interação bóson-férmion. A álgebra graduada de Lie associada à SUSI MQ $N = 2$, em termos das supercargas $Q_\pm$, envolvendo comutador $[A, B]_- = AB - BA$ e anticomutador $[A, B]_+ = AB + BA$:

$$
[Q_-, Q_+]_+ = H_{SUSI}, \quad Q_+ = Q_-^\dagger, \quad Q_- = Q_+^\dagger, \tag{58}
$$

$$[H_{SUSI}, Q_-]_- = 0 = [H_{SUSI}, Q_+]_-, \qquad Q_+^2 = Q_-^2 = 0. \tag{59}$$

Os elementos desta super-álgebra podem ser representados em termos dos operadores diferenciais de primeira ordem $A^\pm$. Neste caso, temos:

$$H_{SUSI} = \hat{H}, \quad Q_- = \sigma_- A^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A^- & 0 \end{pmatrix}, \tag{60}$$

onde $\sqrt{2}\sigma_- = \sigma_1 - i\sigma_2$ com σ_1 e σ_2 sendo as matrizes de Pauli. A energia do estado fundamental do setor bosônico H_- é zero, ou seja, $E_-^{(0)} = 0 = E_{SUSI}^{(0)}$. A equação de Schrödinger para a função de onda que descreve um estado quântico SUSI na representação abstrata,

$$\hat{H} \mid \Psi >_{SUSI} = E \mid \Psi >_{SUSI}, \qquad \mid \Psi >_{SUSI} = \begin{pmatrix} \mid \psi >_- \\ \mid \psi >_+ \end{pmatrix}, \qquad E \equiv E_{SUSI} \geq 0, \tag{61}$$

nos fornece as seguintes relações entrelaçadas entre as autofunções dos setores bosônico, $\mid \psi >_-$, e fermiônico, $\mid \psi >_+$, conforme a equação (54):

$$\mid \psi >_+ = \frac{1}{\sqrt{E}} A^- \mid \psi >_-, \qquad \mid \psi >_- = \frac{1}{\sqrt{E}} A^+ \mid \psi >_+ . \tag{62}$$

Por conseguinte vemos que os operadores $A^\pm$ não são os operadores de simetria, mas eles graduam os subespaços de Hilbert da SUSI MQ, levando o setor bosônico no setor fermiônico e vice-versa. Os operadores de simetria são as supercargas $Q_\pm$. Na descrição de Schrödinger, a função de onda depende de x e está relacionada com a representação abstrata através do seguinte produto escalar: $\Psi_{SUSI}(x) =< x \mid \Psi >_{SUSI}$. Justifica-se esta denominação de setores bosônico e fermiônico, devido ao fato de que o operador de número fermiônico, $N_f = (1 - \sigma_3)/2, \quad N_f N_f = N_f$, possui o auto-espinor $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ associado ao autovalor $n_f = 0$ (nenhum férmion) e o auto-espinor, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ com $n_f = 1$ (um férmion). Lembre-se de que, pelo *teorema de spin-estatística*, cada estado quântico só pode ser ocupado por no máximo um férmion ou um número inteiro de bósons.

Abordaremos agora a quebra espontânea da SUSI em mecânica quântica. Quando o vácuo deixa de ser invariante SUSI,

$$T(\epsilon, \bar{\epsilon})|\Psi_{SUSI}^{(0)} > \neq |\Psi_{SUSI}^{(0)} >, \quad T(\epsilon, \bar{\epsilon}) = e^{i(\bar{\epsilon} Q_- + Q_+ \epsilon)}, \tag{63}$$

diz-se que há uma quebra espontânea da SUSI. Isto se dá precisamente quando $E_{SUSI}^{(0)} \neq 0$. Note que de acordo com a equação (31) a supercarga clássica Q corresponde ao operador Q_- da versão quântica e T é um operador unitário ($T^\dagger = T^{-1}$). Dado uma curva de potencial, se ocorrer pelo menos um mínimo com valor zero o potencial não apresenta quebra espontânea de SUSI. Obviamente, estamos considerando o caso em que o potencial é uma função positiva dependente exclusivamente da posição da partícula.

Agora assumindo que $|\Psi_{SUSI}^{(0)} >$ é invariante SUSI e $Q_\pm$ são os operadores de supercargas mutuamente adjuntos, temos:

$$\begin{aligned} E_{SUSI}^{(0)} &= < \Psi_{SUSI}^{(0)}|H_{SUSI}|\Psi_{SUSI}^{(0)} > = < \Psi_{SUSI}^{(0)}|(Q_- Q_+ + Q_+ Q_-)|\Psi_{SUSI}^{(0)} > \\ &= |Q_+|\Psi_{SUSI}^{(0)} > |^2 + |Q_-|\Psi_{SUSI}^{(0)} > |^2 = 0 \end{aligned} \tag{64}$$

se e somente se

$$Q_-|\Psi^{(0)}_{SUSI}>= Q_+|\Psi^{(0)}_{SUSI}>= 0 \Rightarrow T(\epsilon,\bar{\epsilon})|\Psi^{(0)}_{SUSI}>= |\Psi^{(0)}_{SUSI}>, \tag{65}$$

ou seja, se $E^{(0)}_{SUSI} = 0$ dizemos que não há quebra espontânea de supersimetria e, portanto, a SUSI é uma simetria exata sempre que existir uma solução normalizável, da equação de Schrödinger, associada a energia zero. Podemos implementar uma análise precisa da normalizabilidade da função de onda, $\Psi^{(0)}_{SUSI}(x)$, que descreve o estado fundamental, em termos do superpotencial $W(x)$. De fato, considerando que em uma dimensão $\Psi^{(0)}_{SUSI}(x)$ é aniquilada pela supercarga matricial Q_-, dada pela equação (60), obtemos:

$$Q_-\Psi^{(0)}_{SUSI}(x) = 0 \Rightarrow \Psi^{(0)}_{SUSI}(x) = \begin{pmatrix} \psi^{(0)}_-(x) \\ 0 \end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} exp\left(-\int_0^x W(y)dy\right) \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{66}$$

Obviamente, para que $\Psi^{(0)}_{SUSI}(x)$ seja normalizável vemos que é necessário e suficiente a seguinte condição sobre a topologia do superpotencial:

$$\int_0^x W(y)dy \to \infty, \quad x \to \pm\infty. \tag{67}$$

Neste caso, N é a constante de normalização. Um aspecto bastante importante é a impossibilidade do nível de energia do estado fundamental ser degenerado quando não há quebra espontânea da SUSI. Pois, da definição de $A^{\pm}$ em (52), obtém-se a seguinte relação entre as soluções de $A^-\psi^{(0)}_-(x) = 0$ e $A^+\psi^{(0)}_+(x) = 0$:

$$\psi^{(0)}_-(x)\psi^{(0)}_+(x) = C, \tag{68}$$

onde C é uma constante real. Note que, se $\psi^{(0)}_-(x)$ for normalizável, então $\psi^{(0)}_+(x)$ será não-normalizável e, portanto, a energia zero não será permitida para H_+. Neste caso, $\psi^{(0)}_+(x)$ é uma solução da equação de Schrödinger, mas não é aceitável fisicamente.

Sobretudo, podemos afirmar que temos quebra espontânea de supersimetria em mecânica quântica quando existir uma função de onda normalizável associada ao menor valor de energia de um potencial, desde que a respectiva energia seja maior do que zero.

V. HIERARQUIA DE HAMILTONIANAS SUPERSIMÉTRICAS

A análise da SUSY nos fornece uma hierarquia de Hamiltonianas que permite calcularmos as autofunões e autovalores de energia de H_1 (Sukumar [10]). Considerando $H_- = H_1$ e $H_+ = H_2$, temos:

$$H_1 = A_1^+A_1^- + E_1^{(0)}, \quad A_1^{(-)} = \psi_1^{(0)}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{d}{dx}\right)\frac{1}{\psi_1^{(0)}} = (A_1^+)^\dagger, \quad E_1^{(0)} = 0, \tag{69}$$

com o seu companheiro supersimétrico dado por

$$H_2 = A_1^-A_1^+ + E_1^{(0)}, \qquad V_2(x) = V_1(x) - \frac{d^2}{dx^2}\ell n\psi_1^{(0)}. \tag{70}$$

O espectro H_1 e H_2 satisfazem

$$E_2^{(n)} = E_1^{(n+1)}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{71}$$

com suas autofunções relacionadas por

$$\psi_1^{(n+1)} \alpha A_1^+ \psi_2^{(n)}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{72}$$

Fatorizando H_2 em termos de sua função de onda do estado fundamental $\psi_2^{(0)}$ nós temos

$$H_2 = -\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} + V_2(x) = A_2^+ A_2^- + E_2^{(0)}, \quad A_2^- = \psi_2^{(0)} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{d}{dx} \right) \frac{1}{\psi_2^{(0)}}, \tag{73}$$

e o companheiro SUSY de H_2 é dado por

$$H_3 = A_2^- A_2^+ + E_2^{(0)}, V_3(x) = V_2(x) - \frac{d^2}{dx^2} \ell n \psi_1^{(0)}. \tag{74}$$

O espectro de H_2 e H_3 satisfazem a condição

$$E_3^{(n)} = E_2^{(n+1)}, n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{75}$$

com suas autofunções relacionadas por

$$\psi_2^{(n+1)} \alpha A_2^+ \psi_3^{(n)}, n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{76}$$

Repetindo este procedimento obtemos a seguinte generalização:

$$H_n = -\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} + V_n(x) = A_n^+ A_n^- + E_n^{(0)} = A_{n-1}^- A_{n-1}^+ + E_{n-1}^{(0)}, \tag{77}$$

$$A_n^- = \psi_n^{(0)} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{d}{dx} \right) \frac{1}{\psi_n^{(0)}} = \left(A_n^+ \right)^\dagger, \tag{78}$$

$$\begin{aligned} V_n(x) &= V_{n-1}(x) - \frac{d^2}{dx^2} \ell n \psi_{n-1}^{(0)} \\ &= V_1(x) - \frac{d^2}{dx^2} \ell n (\psi_1^{(0)} \psi_2^{(0)} \ldots \psi_{n-1}^{(0)}), \quad n = 2, 3, \ldots, M, \end{aligned} \tag{79}$$

cujos estpectros satisfazem ao mapeamento

$$E_1^{n-1} = E_2^{n-2} = \ldots = E_n^{(0)}, \qquad n = 2, 3, \ldots, M, \tag{80}$$

$$\psi_1^{n-1} \propto A_1^+ A_2^+ \ldots A_{n-1}^+ \psi_n^{(0)}. \tag{81}$$

Podemos resumir o processo desenvolvido por Sukumar através do seguinte mapeamento:

$$
\begin{array}{cccccccccc}
E_1^{(n)} & \_\_ & E_2^{(n)} & \_\_ & E_3^{(n)} & \_\_ & E_4^{(n)} & \_\_ & E_{n+1}^{(0)} & \_\_\_\_ \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
E_1^{(4)} & \_\_ & E_2^{(3)} & \_\_ & E_3^{(2)} & \_\_ & E_4^{(1)} & \_\_ & \cdots & \cdots \\
E_1^{(3)} & \_\_ & E_2^{(2)} & \_\_ & E_3^{(1)} & \_\_ & E_4^{(0)} & \_\_ & \cdots & \cdots \\
E_1^{(2)} & \_\_ & E_2^{(1)} & \_\_ & E_3^{(0)} & \_\_ & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
E_1^{(1)} & \_\_ & E_2^{(0)} & \_\_ & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
E_1^{(0)} & \_\_ & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
 & H_1 & & H_2 & & H_3 & & H_4 & \cdots & H_{n+1}
\end{array}
$$

Note que o nível de energia do estado fundamental do (n+1)th-membro da hierarquia é degenerado com o nível de energia do n-ésimo estado excitado do primeiro membro da hierarquia.

VI. POTENCIAIS ISOESPECTRAIS: A CONSTRUÇÃO VIA SUSY DO POTENCIAL GENERALIZADO DE ABRAHAM E MOSES

Nesta seção, apresentamos alguns resultados da nossa aplicação do método SUSY para se construir o potencial generalizado de Abraham e Moses [28] (Kostelecky e Nieto [8]) associado ao hamiltoniano radial do átomo de hidrogênio [25].

Iniciamos com a equação radial para o átomo de hidrogênio, colocando-se $z = 1$, para o momento angular orbital ℓ.

$$\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{d^2}{d\rho^2}+\frac{2}{\rho}\frac{d}{d\rho}\right)-\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{4}+\frac{\lambda}{\rho}-\frac{\ell(\ell+1)}{\rho^2}\right]\right\}R_{N\ell}(\rho)=0, \tag{82}$$

$$N=\ell+1,\ell+2,\ldots, \tag{83}$$

onde

$$\alpha^2=-8E_N=\frac{4z^2}{N^2}=\frac{4}{N^2}\Rightarrow\alpha=\frac{2}{N},\quad \rho=\alpha r=\frac{2r}{N}, \tag{84}$$

$$\lambda=\left(-\frac{1}{2E_N}\right)^{\frac{1}{2}}=N, \tag{85}$$

$$R_{\ell+1,\ell}(r)=R_{\ell+1,\ell}(\rho)=R_\ell^{(0)}(\rho)=R_\ell^{(0)}(r)\propto r^\ell\exp\left(-\frac{r}{\ell+1}\right), \tag{86}$$

$$E_\ell^{(0)}=-\frac{1}{2N^2}\mid_{N=\ell+1}=-\frac{1}{2(\ell+1)^2}. \tag{87}$$

Na representação $-\chi, \chi(r)=rR(r)$, para a qual

$$\chi_\ell^{(0)}(r) = rR_\ell^{(0)}(r) \propto r^{\ell+1}\exp\left(-\frac{r}{\ell+1}\right), \tag{88}$$

construimos sob duas transformações SUSY sucessivas, uma corrente de hamiltonianos SUSY, $H_1(\ell) \to H_2(\ell) = \widetilde{H}_2(\ell) \to \widetilde{H}_1(\ell,\alpha)$, a saber:

$$H_1(\ell) = A_1^+(\ell)A_1^-(\ell) - \frac{1}{2(\ell+1)^2}, \tag{89}$$

$$A_1^\pm(\ell) = [\chi_\ell^{(o)}(r)]^{\mp 1}\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{d}{dr}\right)[\chi_\ell^{(o)}(r)]^{\pm 1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\pm\frac{d}{dr} + \frac{(\ell+1)}{r} - \frac{1}{\ell+1}\right\}, \tag{90}$$

$$V_1(r) = -\frac{1}{r} + \frac{\ell(\ell+1)}{2r^2}; \tag{91}$$

$$H_2(\ell) = A_1^-(\ell)A_1^+(\ell) - \frac{1}{2(\ell+1)^2}, \tag{92}$$

$$\begin{aligned} V_2(r) &= V_1(r) - \frac{d^2}{dr^2}\ell n\chi_\ell^{(o)}(r) = V_1(r) - \frac{d}{dr}\left(\frac{\ell+1}{r} - \frac{1}{\ell+1}\right) \\ &= V_1(r) + \frac{\ell+1}{r^2} = -\frac{1}{r} + \frac{(\ell+1)(\ell+2)}{2r^2}, \end{aligned} \tag{93}$$

$$E_2^{(m)} = E_1^{(m+1)}, (m = 0, 1, 2, \ldots). \tag{94}$$

Em virtude das equações (88), (90) e (92) é visto que $[X_\ell^{(o)}(r)]^{-1}$ é uma solução formal e não normalizável de H_2 para sua energia não Física $-\frac{1}{2}(\ell+1)^2$. A solução geral correspondente, a qual, por sua vez, também é formal e não normalizável, é dada por

$$\left\{\left[\chi_\ell^{(0)}(r)\right]^{-1}\right\}_G = \left[\chi_\ell^{(0)}(r)\right]^{-1}\left\{\alpha + \int_0^r \left[\chi_\ell^{(0)}(\tilde{r})\right]^2 d\tilde{r}\right\} \tag{95}$$

$$= \frac{1}{r^{\ell+1}}\exp\left(\frac{r}{\ell+1}\right)\left\{\alpha + \int_0^r (\tilde{r})^{2\ell+2}\exp\left(\frac{-2}{\ell+1}\tilde{r}\right)d\tilde{r}\right\}. \tag{96}$$

Agora, explorando a solução geral (95) para fatorizar H_2 no estado não físico com energia $-\frac{1}{2(\ell+1)^2}$, obtemos:

$$\widetilde{H}_2 = H_2 = B^-{}_1(\ell)B^+{}_1(\ell) - \frac{1}{2(\ell+1)^2}, \quad \widetilde{V}_2(r) = V_2(r), \tag{97}$$

onde $B_1^\pm(\ell)$ são dados, em analogia com (90), por

$$B_1^\pm(\ell) = \left[\left\{\left[\chi_\ell^{(0)}(r)\right]^{-1}\right\}_G\right]^\pm \left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{d}{dr}\right)\left[\left\{\left[\chi_\ell^{(0)}(r)\right]^{-1}\right\}_G\right]^{\pm 1}. \tag{98}$$

A construção da transformação SUSY $\widetilde{H}_2 \to \widetilde{H}_1(\ell;\alpha)$ se procede na seguinte maneira:

$$\widetilde{H}_1(\ell;\alpha) = B^+{}_1(\ell)B^-{}_1(\ell) - \frac{1}{2(\ell+1)^2}, \tag{99}$$

$$\begin{aligned}
\widetilde{V}_1 &= \widetilde{V}_2 - \frac{d^2}{dr^2}\ell n\left\{\left[\chi_\ell^{(0)}(r)\right]^{-1}\right\}_G \\
&= V_2 - \frac{d^2}{dr^2}\ell n\left\{\left[\chi_\ell^{(0)}(r)\right]^{-1}\right\}_G \\
&= V_1 - \frac{d^2}{dr^2}\ell n[\chi_\ell^{(0)}(r)\left\{\left[\chi_\ell^{(0)}(r)\right]^{-1}\right\}_G \\
&= V_1 - \frac{d^2}{dr^2}\ell n[\chi_\ell^{(0)}(r)\frac{1}{\chi_\ell^{(0)}(r)}\left[\propto + \int_0^r \left(\chi_\ell^{(0)}(\widetilde{r})\right)^2 d\widetilde{r}\right] \\
&= V_1 - \frac{d^2}{dr^2}\ell n\left\{\propto + \int_0^r (\widetilde{r})^{2\ell+2}\exp\left(-\frac{2}{\ell+1}\widetilde{r}\right)d\widetilde{r}\right\}.
\end{aligned} \tag{100}$$

Utilizando em (100) a fórmula familiar, para n inteiro positivo,

$$\int_{b_1}^{b_2} (\widetilde{r})^n e^{(a\widetilde{r})} d\widetilde{r} = \frac{e^{a\widetilde{r}}}{a}\left\{(\widetilde{r})^n - \frac{n}{a}(\widetilde{r})^{n-1} + \frac{n(n-1)}{a^2}(\widetilde{r})^{n-2} + \ldots + \frac{(-1)^n n!}{a^n}\right\}|_{b_1}^{b_2} \tag{101}$$

com

$$b_2 = r, \quad b_1 = 0, \quad n = 2\ell+2, \quad a = -\frac{2}{(\ell+1)}, \tag{102}$$

obtemos:

$$\begin{aligned}
&\left\{\alpha + \int_0^r (\widetilde{r})^{2\ell+2}\exp\left(-\frac{2\widetilde{r}}{\ell+1}\right)d\widetilde{r}\right\} \\
&= -\left(\frac{\ell+1}{2}\right)\exp\left(-\frac{2r}{\ell+1}\right) \\
&\quad \text{x}\left[r^{2\ell+2} + (\ell+1)^2 r^{2\ell+1} + \frac{1}{2}(\ell+1)^3(2\ell+1)r^{2\ell} + \ldots + \frac{(\ell+1)^{(2\ell+2)}}{2^{2\ell+2}}(2\ell+2)!\right] \\
&\quad + \frac{(\ell+1)^{2\ell+3}}{2^{2\ell+3}}(2\ell+2)! + \alpha.
\end{aligned} \tag{103}$$

Escolhendo

$$\alpha = -\frac{(\ell+1)^{2\ell+3}(2\ell+2)!}{2^{2\ell+3}} \tag{104}$$

obtemos, de (100), (103) e (104), o novo potencial $\widetilde{V}_1$ que chamamos de $\widetilde{V}_1(r;\ell)$:

$$\widetilde{V}_1 = \widetilde{V}_1(r;\ell) = V_1(r) - \frac{d^2}{dr^2}\ell n\left[\sum_{s=0}^{2\ell+2}\frac{(2\ell+2)!}{(2\ell+2-s)!}\left(\frac{\ell+1}{2}\right)^s r^{(2\ell+2-s)}\right] \tag{105}$$

$$= -\frac{1}{r} + \frac{\ell(\ell+1)}{2r^2} - \frac{d^2}{dr^2}\ell n\left[\sum_{s=0}^{2\ell+2}\frac{(2\ell+2)!}{(2\ell+2-s)!}\left(\frac{\ell+1}{2}\right)^s r^{(2\ell+2-s)}\right] \tag{106}$$

A Eq. (106) é nossa expressão para o potencial generalizado de Abraham-Moses, obtido aqui pelo método SUSY para o hamiltoniano radial do átomo de hidrogênio com momento angular ℓ arbitrário.

No caso particular, com $\ell = 0$ em (106), $\widetilde{V}_1(r;0)$ torna-se

$$\widetilde{V}_1(r;0) = -\frac{1}{r} + \frac{8r(r+1)}{(2r^2+2r+1)^2}, \tag{107}$$

o qual coincide com aquele de Abraham e Moses [28]. Porém, esses autores têm adotado o método de espalhamento inverso do formalismo de Gelfand e Levitan em sua dedução associada ao momento angular, $\ell = 0$.

Observe-se que o potencial $\widetilde{V}_1(r;0)$ em (107) pode ser colocado na seguinte forma equivalente:

$$\widetilde{V}_1(r;0) = -\frac{1}{r} + \text{Parte Real}\left\{\frac{1}{(r-a)^2}\right\}, \quad a = -\frac{1}{2} - \frac{i}{2}, \tag{108}$$

utilizando-se a igualdade

$$\frac{8r(r+1)}{(2r^2+2r+1)^2} = \frac{1}{(r-a)^2} + \frac{1}{(r-a^*)^2}. \tag{109}$$

Em virtude de (88), (95) e (103), explicitamente temos:

$$\left\{\left[\chi_\ell^{(0)}(r)\right]^{-1}\right\}_G = -\frac{1}{2}e^{-r}\left(r+1+\frac{1}{2}\right), \tag{110}$$

a qual é não normalizável, confirmando que $-\frac{1}{2(\ell+1)^2}$ não é a energia Física de $\widetilde{H}_2 = H_2$. É óbvio que os níveis de $\widetilde{H}_2$ são os mesmos de H_2, isto é,

$$\widetilde{E}_2^{(m)} = E_2^{(m)}, \quad (m = 0, 1, 2, \ldots). \tag{111}$$

Veremos agora que $\widetilde{H}_1$, o companheiro SUSY de $\widetilde{H}_2$, não possui o nível $-\frac{1}{2(\ell+1)^2}$. Como a função de onda associada a este nível é aniquilada por $B^-{}_1(\ell)$, segue-se de (98) que a solução é dada por

$$\left\{\left[\chi_\ell^{(0)}(r)\right]^{-1}\right\}_G \frac{r}{2r^2+2r+1}e^r \tag{112}$$

onde utilizamos (111). Como este estado não é normalízavel, $\widetilde{H}_1(\ell) = B^+{}_1(\ell)B^+{}_2(\ell) - 1/2(\ell+1)^2$, também não possui o nível $\frac{-1}{2(\ell+1)^2}$, em contraste com H_1, o hamiltoniano radial do átomo de hidrogênio para $\ell = 0$. Entretanto, $\widetilde{H}_1(\ell)$ possue um estado fundamental físico $[\widetilde{\chi}_1(r)]^{(0)}_{\ell=0}$ para a energia $\frac{-1}{2(\ell+1)^2}$, o qual pode ser obtido da seguinte construção SUSY:

$$[\widetilde{\chi}_1(r)]^{(0)}_{\ell=0} \propto B^+{}_1(\ell=0)\,[\chi_2(r)]^{(0)}{}_{\ell} = 0. \tag{113}$$

Mas, de acordo com a equação (97), temos:

$$[\widetilde{\chi}_2(r)]^{(0)}_{\ell=0} \propto [\chi_2(r)]^{(0)}_{\ell=0} \propto \exp\left(-\frac{r}{\ell+2}\right) r^{\ell+2} \tag{114}$$

e, assim, a equação (113) torna-se, em virtude de (98), em

$$[\widetilde{\chi}_1(r)]^{(0)}_{\ell=0} \propto \left\{\left[\chi^{(0)}_\ell(r)\right]^{-1}\right\}_G \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{d}{dr} \left[\left\{\left[\chi^{(0)}_\ell(r)\right]^{-1}\right\}_G\right]^{-1} e^{\frac{r}{\ell+2}} r^{\ell+2} \tag{115}$$

Substituindo (110) e (113) em (115) e simplificando-a, obtemos a seguinte expressão para $[\widetilde{\chi}_1(r)]^{(0)}_{\ell=0}$:

$$[\widetilde{\chi}_1(r)]^{(0)}_{\ell=0} \propto \frac{\exp\left(-\frac{r}{2}\right)}{2r^2+r+1} \left(r^4 + 3r^3 + \frac{9}{2}r^2 + 3r\right), \tag{116}$$

a qual coincide com aquela obtido por Kostelecky e Nieto [8], partindo do método de espalhamento inverso (observando-se a notação $y = 2r$ usada por esses autores).

Note-se que $[\widetilde{\chi}_1(r)]^{(0)}_{\ell=0}$ dado por (116) é normalizável e, assim, levando ao mapeamento dos espectros de $\widetilde{H}_1$ e $\widetilde{H}_2 = H_2$:

$$\widetilde{E}^{(m)}_1 = \widetilde{E}^{(m)}_2 = E^{(m)}_2, (m = 0, 1, 2, \ldots). \tag{117}$$

De (94) e (117), temos:

$$\widetilde{E}^{(m)}_1 = E^{(m+1)}_1, (m = 0, 1, 2, \ldots). \tag{118}$$

Isto prova que o potencial $\widetilde{V}_1(r; 0)$ de (107) elimina o estado fundamental do hamiltoniano da equação radial do átomo de hidrogênio, mas mantém o restante do espectro de energia. Analogamente, resultado semelhante segue-se para ℓ arbitrário. Nosso resultado em (106), para $\widetilde{V}_1(r; 0)$, é equivalente com a seguinte expressão para o potencial $[\widetilde{V}_1(r; \ell)]_{\mathrm{KN}}$, dada por Kostelecky e Nieto [8], via seus estudos do formalismo de Gelfand e Levitan [29]

$$[\widetilde{V}_1(r; \ell)]_{\mathrm{KN}} = 4\phi(\ell) \left\{\phi(\ell) + \frac{\ell+1}{r} - \frac{1}{\ell+1}\right\} \tag{119}$$

onde

$$\phi(\ell) = (2r)^{2\ell+2} \left\{(2\ell+2)! \sum_{k=0}^{2\ell+2} \frac{(2r)^k (\ell+1)^{2\ell+3-k}}{k!}\right\}^{-1}. \tag{120}$$

A seguir aprsentaremos as conclusões deste trabalho.

VII. CONCLUSÃO

A mecânica quântica supersimétrica tem sido uma técnica algébrica bastante usada em resoluções espectrais e para se construir novos potenciais iso-espectrais em mecânica quântica [10] e com fases equivalentes [18]. Recentemente, foi construído uma nova classe de potenciais isoespectrais em mecânica quântica e em teoria de campos bidimensionais (1+1 dimensões) [11]. Neste trabalho, investigamos a lagrangeana com supersimetria (SUSI) $N = 1$ e $N = 2$.

Vimos que neste caso da supersimetria estendida (SUSI $N = 2$) pode-se introduzir um termo de potencial $V(\phi)$ na super-ação de dimensão par, a qual é invariante para as seguintes translações no super-espaço $(t; \Theta_1; \Theta_2)$: $t \to t' = t + i\epsilon_1\Theta_1 + i\epsilon_2\Theta_2$, $\Theta_1 \to \Theta_1' = \Theta_1 + \epsilon_1$, e $\Theta_2 \to \Theta_2' = \Theta_2 + \epsilon_2$. Essas transformações nos fornece os geradores da SUSI que são denominados de supercargas, cujos símbolos são Q e $\bar{Q}$, em mecânica clássica e $Q_\pm$, em mecânica quântica (MQ). Consideramos uma síntese do procedimento de quantização canônica de Dirac [2], devido a presença de vínculos inerentes a hamiltoniana SUSI, cujo detalhes o leitor pode encontrar nas referências [5,12]. Barcelos *et al* [12] empregaram a derivação à esquerda, para as variáveis de Grassmann, de modo que os parênteses de Dirac resultaram em um sinal negativo, ou seja, $\{\psi, \bar{\psi}\}_D = -i$. Neste trabalho, adotamos a regra de derivada à direita [dada pela equação (6)], o que nos forneceu este parêntese de Dirac com um sinal positivo, conforme evidenciado em (24). Devido o *teorema de spin-estatística* para férmions, o respectivo parêntese de Dirac foi substituído por um anticomutador.

Por outro lado, quando já se conhece o hamiltoniano em MQ, a SUSI N=2 pode ser construída seguindo o tratamento de Witten [3,4], [8–10] e [13–22]. Mostramos ainda as principais características da SUSI em mecânica quântica não-relativística, inclusive a realização da super-álgebra de Lie, a qual é uma álgebra graduada de Lie contendo dois comutadores e um anticomutador, o que possibilita uma mistura de estados bosônico e fermiônico num mesmo multipleto. Vimos que na descrição de Schrödinger da MQ o estado quântico SUSI (61) é descrito por uma função de onda de duas componentes. Mostramos também que o hamiltoniano supersimétrico é uma matriz diagonal 2x2, cujos elementos são denominados de hamiltonianos dos setores bosônico e fermiônico, com o espectro de energia maior ou igual a zero. Analisamos a energia do estado fundamental e vimos que se ela for positiva ocorre quebra espontânea da supersimetria em mecânica quântica. Portanto, a SUSI é uma simetria exata em MQ quando a função de onda que descreve o estado fundamental SUSI estiver associada a energia zero.

O nosso trabalho, ilustra o poder do método SUSY para construir novos potenciais para o caso exemplar do hamiltoniano radial do átomo de Hidrogênio, os quais mantêm os espectros idênticos ao do da Eq. radial do átomo de hidrogênio, com exceção apenas das perdas dos níveis fundamentais para o momento angular orbital ℓ fixo. Com nossa análise SUSY, de fato, restauramos o famoso potencial de Abraham e Moses [28] para $\ell = 0$ e também de Kostelecky e Nieto [8] para ℓ arbitrário. Nosso trabalho serve, também, para se fazer uma demonstração da equivalência do método SUSY com o método da teoria de espalhamento inverso de Gelfand e Levitan [29], aplicado por esses autores. Baseando-se em nossa análise, podemos dizer que o método SUSY oferece uma ferramenta algébrica poderosa especialmente na construção de novos potenciais iso-espectrais.

AGRADECIMENTOS

O autor agradece ao *Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico Tecnológico (CNPq)* pelo auxílio financeiro parcial através de uma bolsa de estudos de Pós-doutorado. RLR agradece aos Professores Jambunatha Jayaraman e Arvind Narayan Vaidya pelos incentivos. Os agradecimentos vão também para o Prof. José Abdalla Helayël Neto pelas discussões esclarecedoras e, principalmente, pela excelente hospitalidade no CBPF.

REFERENCES

[1] R. de Lima Rodrigues, *Rev. Bras. de Ens. de Fis.* **19**, 374 (1997).

[2] P. A. M. Dirac, *Can. J. Math.* **2**, 129, (1950); P. A. M. Dirac, *Lectures on Quantum Mechanics* (Belfer Graduate School of Science, Yeshiva University, N. Y.), (1964); A. Hanson, T. Regge, and C. Teitelboim, *Constrained Hamiltonian Systems* (Accademia Nazionale dei Lincei, Rome, 1976).

[3] E. Witten, *Nucl. Phys.* **B185**, 513, (1981); A. A. Andrianov, N. V. Borisov e M. V. Ioffe, *Sov. Phys. JETP Lett.* **39**, 93, (1984); *Phys. Lett.* **A105**, 19, (1984).

[4] R. de Lima Rodrigues e A. N. Vaidya, "SUPERSIMETRIA: DA MECÂNICA CLÁSSICA À MECÂNICA QUÂNTICA," *Rev. Bras. de Ens. de Fis.* **19**, 374 (1997).

[5] C. A. P. Galvão e C. Teitelboim, *J. Math. Phys.* **21**, 1863, (1980).

[6] P. Salomonson e J. W. van Holten, *Nucl. Phys.* **B196**, 509, (1982); F. Cooper e B. Freedman, *Ann. Phys.* (N. Y.) **146**, 262, (1983); F. Ravndal, *Proc. CERN School of Physics*, (Geneva: CERN) página 300, (1984).

[7] R. de Lima Rodrigues, Wendel Pires de Almeida e Israel Fonseca Neto, "Supersymmetric classical mechanics: free case," e-preprint hep-th/0201242 (Jan. 2002).

[8] M. Bernstein e L. S. Brown, *Phys. Rev. Lett.* **52**, 1933, (1984); V. A. Kostelecky e M. M. Nieto, *Phys. Rev. Lett.* **53**, 2285, (1984);Id., Ibid. *Phys. Rev.* **A32**, 1293, (1985); Id., Ibid. *Phys. Rev.* **A32**, 3243, (1985).

[9] L. Gendenshtein, *JETP Lett.* **38**, 356, (1983); R. Dutt, A. Khave e U. P. Sukhatme, *Am. J. Phys.* **56**, 163, (1988).

[10] C. Sukumar, *J. Phys. A: Math. Gen.* **18**, L57, 2917, 2937, (1985). (Esta página, 2937, tem um trabalho mostrando a conexão da SUSI com o método de espalhamento inverso.)

[11] R. de Lima Rodrigues, "New potential scalar models via the kink of the $\lambda\phi^4$ theory", *Modern Physics Letters* **10A**, 1309, (1995).

[12] J. Barcelos-Neto e Ashok Das, *Phys. Rev.* **D33**, 2863, (1986); J. Barcelos-Neto, Ashok Das e W. Scherer, *Acta Phys. Pol.* **B18**, 267, (1987).

[13] R. de Lima Rodrigues, "Alguns estudos sobre a mecânica quântica supersimétrica e a álgebra de Wigner-Heisenberg para sistemas quânticos em conexões com osciladores", tese de mestrado em Física defendida no departamento de Física, UFPB, Campus I, João Pessoa-PB, 29 de agosto de 1988, sob orientação do Prof. Dr. Jambunatha Jayaraman. (Parte desta tese está contida nos dois trabalhos da ref. seguinte.)

[14] J. Jayaraman e R. de Lima Rodrigues, *J. Phys. Math. Gen.* **A23**, 3123, (1990); J. Jayaraman e R. de Lima Rodrigues, *Mod. Phys. Lett.* **A9**, 1047, (1994).

[15] C. J. Lee, *Phys. Lett.* **A145**, 177, (1990); H. A. Schmitt e A. Mufti, *Can J. Phys.* **68**, 1454, (1990); Yin-Sheng Ling e Wei Zhang, *Phys. Lett.* **A193**, 47, (1994), para citar alguns .

[16] J. Casahorran e S. Nam, *Int. J. Mod. Phys.* **A6**, 2729, (1991); A. Jevicki e J. P. Rodrigues, *Phys. Lett.* **146B**, 55, (1984).

[17] E. Drigo Filho e R. M. Ricota, *Mod. Phys. Lett.* **A6**, 2137, (1991).

[18] B. Talukdar, U. Das, C. Bhattacharyya e P. K. Bera, *J. Phys. Math. Gen.* **A25**, 4073, (1992); R. de Lima Rodrigues, proceedings do *XVI Encontro Nacional de Física de Partículas e Campos*, Caxambu-MG, Brasil, páginas 410-413 (1993).

[19] L. E. Gendenshtein e I. V. Krive, *Sov. Phys. Usp* **28**, 645, (1985).

[20] A. Lahiri, P. K. Roy e B. Bagchi, *Int. J. Mod. Phys.* **A5**, 1383, (1990).

[21] Luc Vinet, *Proceeding da V escola de verão Jorge André Swieca, seção Teoria de Campos e Partículas*, página 291, realizada em Campos do Jordão-SP, (1989).
[22] R. W. Haymaker e A. R. P. Rau, *Am. J. Phys.* **54**, 928, (1986).
[23] F. Cooper, A. Khare, U. Sukhatme, *Phys. Rep.* **251**, 267 (1995).
[24] R. de Lima Rodrigues, "The Quantum Mechanics SUSY Algebra: an Introductory Review," hep-th/0205017 e referências contidas neste trabalho.
[25] R. de Lima Rodrigues, "Abraham-Moses generalized potential via SUSY method," redação final em preparação.
[26] F. Berezin, "The Method of Second Quantization" (Academic Press, New York, 1966); C. E. I. Carneiro e M. T. Thomaz, "A Álgebra dos Férmions", *Revista Brasileira de Ensino de Física*, **22**, 474 (2000).
[27] A. Salam e J. Strathdee, *Nucl. Phys.*, **B76**, 477, (1974); Phys. Rev. **D11**, 1521, (1975).
[28] P. B. Abraham e H. E. Moses, *Phys. Rev.* **A22**, 1333 (1980)
[29] M. Gelfand e B. M. Levitan, *Am. Math. Soc. Transl.* **1 153 (1955)**