Introdução à Topologia Cósmica

G.I. Gomero

Segunda Aula

Espaços de Curvatura Constante

Qual é a forma do Universo?

Espaços de Curvatura Constante

1. Variedades Euclideanas

2. Variedades Esféricas

3. Variedades Hiperbólicas

O Espaço Euclideano

- O modelo padrão para a geometria euclideana n-dimensional é o espaço vetorial

$$R^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \ : \ x_i \in R \ , \ i = 1, 2, \ldots, n\} \, .$$

- O produto interno

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \, ,$$

para todo $x, y \in R^n$, define a distância em R^n

$$d_E(x, y) = |x - y| \, ,$$

chamada de **distância euclideana**, onde $|\ |$ é a norma definida a partir do produto interno segundo

$$|x| = \sqrt{\langle x, x \rangle} \, .$$

- O par $(R^n,\, d_E)$ é chamado de **espaço euclideano** n**-dimensional**, e é denotado por E^n.

O Espaço Euclideano: Isometrias

- Uma **translação** em E^n é uma função

$$\begin{aligned} \tau_a : E^n &\rightarrow E^n \\ x &\mapsto x + a\,, \end{aligned}$$

onde $a \in E^n$.

- O conjunto das translações formam um grupo isomorfo a R^n, e são isometrias em E^n.

- Uma translação em E^n é uma translação de Clifford.

O Espaço Euclideano: Isometrias

- Uma **transformação ortogonal** é uma função $\varphi : E^n \to E^n$ que preserva o produto interno. Ou seja, para todo $x, y \in E^n$,

$$\langle \varphi(x), \varphi(y) \rangle \;=\; \langle x, y \rangle \, .$$

- Uma matriz real $n \times n$ A é dita **ortogonal** se a transformação linear associada

$$\begin{array}{rcl} A : E^n & \to & E^n \\ x & \mapsto & Ax \, , \end{array}$$

  é ortogonal.

- Para associar uma matriz a uma transformação linear fazemos uso da base canônica em R^n.

- Uma matriz A é ortogonal se

$$A^T A = I \; .$$

- Uma transformação ortogonal também é uma isometria euclideana, porém não é uma translação de Clifford.

- O grupo das matrizes ortogonais, $O(n)$, chama-se **grupo ortogonal** n-dimensional.

O Espaço Euclideano: Isometrias

Teorema. Uma função $\varphi : E^n \to E^n$ é uma isometria em E^n se e somente se $\varphi = \tau_a \circ A$, onde $a \in E^n$ e A é uma transformação ortogonal.

- Este teorema afirma que toda isometria euclideana pode ser decomposta de maneira única numa transformação ortogonal seguida de uma translação.

- Se $\varphi : E^n \to E^n$ é uma isometria, então existem $a \in E^n$ e $A \in O(n)$ tal que para todo $x \in E^n$,

$$\varphi(x) = Ax + a\,,$$

  e escrevemos $\varphi = (A, a)$.

- φ é uma translação de Clifford se e somente se $A = I$, portanto as únicas translações de Clifford em E^n são as translações.

O espaço euclideano: isometrias

- Sejam $\alpha = (A, a)$, $\beta = (B, b) \in Isom(E^n)$. Para todo $x \in E^n$,

$$\begin{aligned} \alpha(x) &= Ax + a\,, \\ \beta(x) &= Bx + b\,. \end{aligned}$$

- A lei de composição em $Isom(E^n)$ é dada por

$$\alpha \circ \beta(x) = ABx + Ab + a\,,$$

ou equivalentemente,

$$(A, a) \circ (B, b) = (AB, Ab + a)\,.$$

- O grupo das isometrias euclideanas age transitivamente em E^n, portanto E^n é um espaço homogêneo.

- Temos que
  - $Isom(E^n) = O(n) \times E^n$, no sentido de variedades, então $Isom(E^n)$ é uma variedade diferencial.
  - A lei de multiplicação é uma operação diferenciável.

  Portanto $Isom(E^n)$ é um grupo de Lie.

- A estrutura de grupo de $Isom(E^n)$ é a de um produto semi-direto de E^n com $O(n)$.

Classificação Isométrica

1. A classe $\mathcal{G}_1$ é parametrizada pelas classes de equivalência $SL(3, Z) \cdot A(T^3) \cdot O(3)$, onde $A(T^3)$ é a matriz cujas filas são formadas pelos vetores da base de E^3 que gera o grupo de recobrimento do toro.

2. A classe $\mathcal{G}_2$ é parametrizada pelas ternas ordenadas $(|a|, r, w)$, onde o par (r, w) parametriza o toro bidimensional gerado pelos vetores b e c.

3. As classes $\mathcal{G}_3$, $\mathcal{G}_4$ e $\mathcal{G}_5$ são parametrizadas pelos pares ordenados $(|a|,|b|)$.

4. As classes $\mathcal{G}_6$, $\mathcal{B}_3$ e $\mathcal{B}_4$ são parametrizados pelas ternas ordenadas $(|a|,|b|,|c|)$.

5. As classes $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ são parametrizadas pelas ternas $(r, w, |c|)$, onde o par (r, w) parametriza o recobrimento duplo do espaço modular do toro gerado pelos vetores a e b, que permuta os geradores do reticulado. Mais ainda, para a classe $\mathcal{B}_2$ vale

$$|c| > |a + \frac{1}{2}b| \ .$$

O Espaço Esférico

- O modelo padrão para a geometria esférica n-dimensional é o conjunto

$$S^n = \{x \in E^{n+1} \ : \ |x| = 1\} ,$$

  com a métrica em S^n induzida pela métrica euclideana d_E em E^{n+1}.

- Sejam $x, y \in S^n$ e denotemos por $\theta(x, y)$ o ângulo euclideano entre x e y. A **distância esférica** entre x e y é

$$d_S(x, y) = \theta(x, y) \ .$$

- Para todo $x, y \in S^n$,

$$0 \leq d_S(x, y) \leq \pi \ ,$$

  e $d_S(x, y) = \pi$ se e somente se $x = -y$.

- O par (S^n, d_S) é chamado de **espaço esférico n-dimensional**.

O Espaço Esférico: Isometrias

- O grupo das isometrias da esfera S^n é isomorfo a $O(n+1)$.

- As únicas formas espaciais esféricas de dimensão par são as esferas S^{2n} e os espaços projetivos RP^{2n}.

- Seja $M = S^{2n-1}/\Gamma$ uma forma espacial esférica. Então Γ é um subgrupo discreto de $SO(2n)$ no qual o único elemento com autovalor $+1$ é a identidade.

- Consequência: formas espaciais esféricas de dimensão ímpar são orientáveis.

- O problema de encontrar todas as formas espaciais esféricas tridimensionais se reduz a identificar os subgrupos finitos de $SO(4)$ nos quais todos os elementos, exceto a identidade, possuem autovalores diferentes de $+1$.

A triesfera

Três formas de olhar para a triesfera

1. Como subconjunto de R^4

$$S^3 = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in R^4 \ : \ \sum_{i=1}^{4} x_i^2 = 1 \right\} \ .$$

2. Como subconjunto de C^2

$$S^3 = \left\{ (z_1, z_2) \in C^2 \ : \ |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1 \right\} \ ,$$

onde $z_1 = x_1 + ix_2$ e $z_2 = x_3 + ix_4$, com $i = \sqrt{-1}$.

3. Como o grupo $SU(2)$ pois a função

$$\begin{array}{rcl} \varphi : S^3 & \to & SU(2) \\ (z_1, z_2) & \mapsto & \left(\begin{array}{cc} z_1 & -z_2^* \\ z_2 & z_1^* \end{array} \right) \end{array}$$

é uma bijeção.

A triesfera: Quatérnios

- A triesfera é o conjunto dos quatérnios unitários

$$S^3 = \{q \in Q \ : \ |q| = 1\} \ .$$

- Q é o espaço R^4 com base denotada por $\{1, i, j, k\}$ e tabela de multiplicação dada por

$$\begin{array}{ccc} i^2 = -1 & ij = k & ik = -j \\ ji = -k & j^2 = -1 & jk = i \\ ki = j & kj = -i & k^2 = -1 \ , \end{array}$$

- Correspondência entre C^2 e Q

$$z = (z_1, z_2) \mapsto z_1 + z_2 j$$

- Como Q não é uma álgebra comutativa, a ordem do produto $z_2 j$ tem que ser respeitada.

- A operação de conjugação em Q é definida como

$$z \mapsto z^* = z_1^* - z_2 j \ .$$

- O módulo de $z \in Q$ é

$$\begin{aligned} |z| &= \sqrt{zz^*} \\ &= \sqrt{|z_1|^2 + |z_2|^2} . \end{aligned}$$

- O produto interno de R^4 é

$$\langle z, w \rangle = Re(zw^*) \, ,$$

Os Espaços Lente

Os espaços lente são quocientes da forma

$$L(p,q) = S^3/Z_p \ .$$

- Os grupos cíclicos podem agir em S^3 de diferentes formas, parametrizadas pelo inteiro q tal que

    1. p e q são primos entre si.

    2. $1 \leq q < p/2$.

- Descrevendo S^3 como subconjunto de C^2, Z_p é gerado pela isometria

$$\begin{array}{rcl} \alpha_{(p,q)} : S^3 & \to & S^3 \\ (z_1, z_2) & \mapsto & \left(e^{2\pi i/p} z_1, e^{2\pi i q/p} z_2\right) \ . \end{array}$$

- A distância entre $z = (z_1, z_2)$ e $w = (w_1, w_2)$ é o ângulo entre eles, logo

$$\cos\left(d(z,w)\right) = \langle z, w \rangle = Re(z_1 w_1^* + z_2 w_2^*) \ ,$$

- Se $w = \alpha_{(p,q)} z$, então

$$\cos\left(d(z,w)\right) = \cos\frac{2\pi}{p} + \left(\cos\frac{2\pi q}{p} - \cos\frac{2\pi}{p}\right) |z_2|^2 \ .$$

- Temos portanto

$$r_{inj} = \frac{\pi}{p} \qquad \text{e} \qquad r_-^{max} = \frac{\pi q}{p} \ .$$

O Espaço de Minkowski

- O espaço de Minkowski E_1^n é o espaço R^n com produto interno

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n-1} x_i y_i - x_n y_n \ ,$$

  e norma definida por

$$|x|^2 = \langle x, x \rangle \ .$$

- Um vetor $v \in E_1^n$ é dito
  1. **espacial** se $\langle v, v \rangle > 0$;
  2. **luminoso** se $\langle v, v \rangle = 0$;
  3. **temporal** se $\langle v, v \rangle < 0$.

- Os vetores luminosos formam o cone de luz C_1^n.

- Os vetores espaciais formam o **exterior** de C_1^n.

- Os vetores temporais formam o **interior** de C_1^n.

- O interior de C_1^n é desconexo, uma componente conexa é formada pelos vetores temporais positivos, e a outra pelos vetores temporais negativos.

Transformações de Lorentz

- Uma função $\varphi : E_1^n \to E_1^n$ é uma transformação de Lorentz se preserva o produto escalar, ou seja se

$$\langle \varphi(x), \varphi(y) \rangle = \langle x, y \rangle \, .$$

- Uma base $\xi = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ de E_1^n é dita ortonormal se

$$\langle e_i, e_j \rangle = \eta_{ij} \, ,$$

onde

$$\eta_{ij} = \begin{cases} +1 & \text{se } \; i = j = 1, \ldots, n-1 \\ -1 & \text{se } \; i = j = n \\ 0 & \text{se } \; i \neq j \, . \end{cases}$$

- Uma matriz de Lorentz é uma matriz real $n \times n$ associada a uma transformação de Lorentz.

- Para associar uma matriz a uma transformação linear fazemos uso da base canônica em E_1^n. Nesta base, A é uma matriz de Lorentz se

$$A^T \eta A = \eta \, .$$

O Grupo de Lorentz

- O grupo das matrizes de Lorentz em E_1^n é denotado por $O(n-1,1)$.

- O grupo das matrizes de Lorentz com $det\, A = 1$ é denotado por $SO(n-1,1)$. É o grupo especial de Lorentz.

- Uma transformação de Lorentz positiva não muda o sinal dos vetores temporais. O grupo das transformações de Lorentz positivas é $PO(n-1,1)$, o grupo positivo de Lorentz.

- O grupo $PSO(n-1,1)$ é o grupo formado pelas transformações de Lorentz positivas e com determinante 1. É chamado de grupo positivo especial de Lorentz.

Ângulos lorentzianos

- **Desigualdade de Schwarz.** Se x, y são vetores temporais positivos,

$$\langle x, y \rangle \leq |x||y| \; .$$

- Consequência: existe um número não negativo η que satisfaz

$$\langle x, y \rangle = |x||y| \cosh \eta \; .$$

- η é o ângulo lorentziano entre x e y.

O Espaço Hiperbólico

- O modelo padrão para a geometria hiperbólica n-dimensional é o conjunto

  $$H^n = \{x \in E_1^{n+1} \ : \ |x|^2 = -1 \quad \text{e} \quad x_{n+1} > 0\}\,,$$

  com a métrica em H^n induzida pela métrica de Minkowski.

- Sejam $x, y \in H^n$ e denotemos por $\eta(x,y)$ o ângulo lorentziano entre x e y. A **distância hiperbólica** entre x e y é

  $$d_H(x,y) = \eta(x,y)\ .$$

- O par (H^n, d_H) é chamado de **espaço hiperbólico** n**-dimensional**.

- Como

  $$\cosh \eta(x,y) = -\langle x, y\rangle\ ,$$

  temos que as isometrias de H^n são as transformações positivas de Lorentz.

Variedades Hiperbólicas

Teorema de Rigidez de Mostow. Duas variedades hiperbólicas de volume finito e dimensão $n \geq 3$ que possuem grupos fundamentais isomorfos, são isométricas.

- Em geral, duas variedades com grupos fundamentais isomorfos não são necessariamente homeomorfas. Exemplo: os espaços lente.

- Pelo teorema de Mostow,

  1. duas variedades hiperbólicas tridimensionais de volume finito, com a mesma *forma* tem necessariamente o mesmo *tamanho*, e

  2. invariantes geométricos como volume e comprimentos de geodésicas fechadas, são invariantes topológicos.

Variedades Hiperbólicas

Teorema de não rigidez de Thurston.

Seja $M = H^3/\Gamma$ uma variedade hiperbólica não compacta orientável e de volume finito. Então existe uma sequência infinita de variedades hiperbólicas orientáveis e compactas

$$M_j = H^3/\Gamma_j \ ,$$

tais que

$$Vol(M_i) \leq Vol(M_j) < Vol(M) \quad \text{se} \quad i < j \ ,$$

e que se acumulam em torno de M no sentido que

1. $\lim_{j\to\infty} \Gamma_j = \Gamma$ puntualmente, e
2. $\lim_{j\to\infty} Vol(M_j) = Vol(M)$.

Variedades Hiperbólicas

1. As variedades hiperbólicas compactas tridimensionais podem ser arrumadas em uma sequência enumerável de sequências enumeráveis de variedades.

   (a) Cada sequência de variedades satisfaz o Teorema de Thurston.

   (b) A variedade (ponto) de acumulação de cada sequência é uma variedade com pontas.

   (c) A variedade com pontas de volume mínimo é obtida a partir do complemento do nó "figura 8".

   (d) Existe uma variedade hiperbólica de volume mínimo $V_{min} > 0.32095$.

2. Variedades hiperbólicas podem ser construídas e estudadas com o programa SnapPea escrito por Jeffrey Weeks.

3. Hodgson e Weeks tem compilado uma lista de 11031 variedades hiperbólicas compactas ordenadas por volume crescente. A variedade de menor volume nesta lista tem volume $V_{Weeks} = 0,942707$.

4. Variedades pequenas são gordas. Exemplo: se $V_M < 1.7011$, a menor geodésica fechada em M tem comprimento $l > 0.162$.