

# **Introdução à Topologia Cósmica**

**G.I. Gomero**

Primeira Aula

## **A forma do Universo**

**Um Universo de cristal**

## **A forma do Universo**

1. Espaço-tempo de Robertson-Walker
2. Variedades Quociente
3. Imagens Múltiplas

# Espaço-tempo de Robertson-Walker

A métrica de Robertson-Walker é

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)d\sigma^2$$

onde

- $a(t)$  é o fator de escala e
- $d\sigma$  é uma métrica riemanniana com curvatura seccional constante.

Geralmente escreve-se

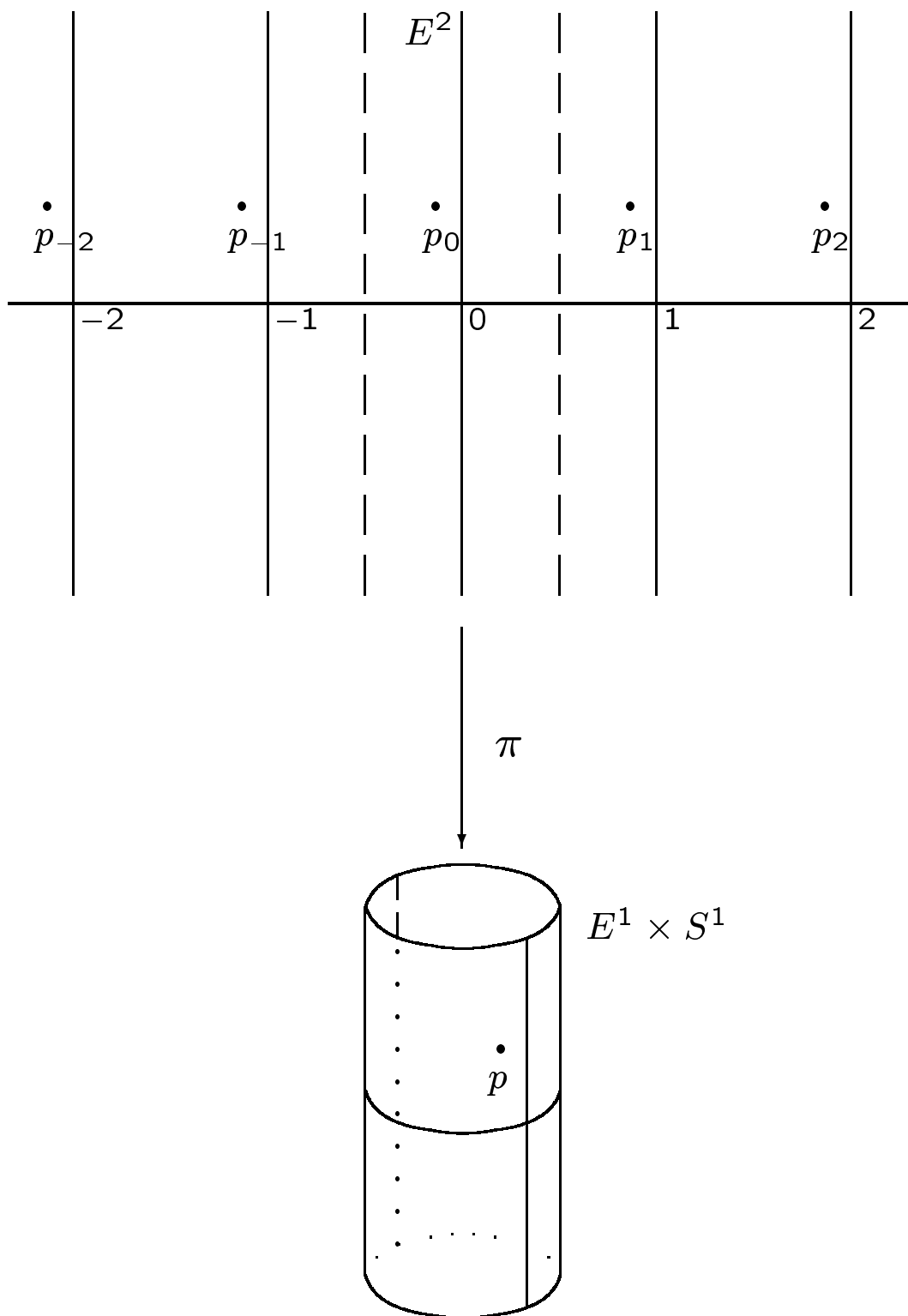
$$d\sigma^2 = \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$$

com

- $k = 1$  no caso esférico
- $k = 0$  no caso euclideano
- $k = -1$  no caso hiperbólico

**Cada uma destas três geometrias admite infinitos espaços topologicamente não-triviais.**

# O cilindro é uma superfície euclidiana



## O cilindro é uma superfície euclideana

- Os pontos  $p_i$  são equivalentes, e portanto estão identificados no cilindro.
- $G$  é gerado por  $t(x, y) = (x + 1, y)$ , logo  $G \approx Z$ .
- Um poliedro fundamental para o cilindro está dado pela parte marcada na figura.

## Topologia do espaço-tempo

O espaço-tempo é descrito da forma

$$R \times M$$

onde

- $M$  é uma variedade 3-dimensional de curvatura constante, i.e.,

$$M = \tilde{M}/G$$

com  $\tilde{M} = S^3, E^3$  ou  $H^3$ .

- $G$  é um grupo discreto de isometrias que age livremente em  $\tilde{M}$ , ou seja o conjunto

$$\{p \in \tilde{M} / gp = p\}$$

é vazio para cada  $g \in G$ , exceto a identidade.

## Poliedro fundamental

- Das muitas maneiras de construir poliedros fundamentais para variedades de curvatura constante, a mais usual é a de Dirichlet.

- O poliedro de Dirichlet com centro  $p \in \widetilde{M}$  é definido como

$$\mathcal{D}_p = \{q \in \widetilde{M} : d(p, q) \leq d(gp, q), \forall g \in G\}$$

- Em geral o poliedro de Dirichlet depende do centro.

# **Poliedro fundamental**



## **Catálogos com imagens múltiplas**

## Hipóteses na construção dos catálogos

Nosso processo de construção de catálogos

1. Pressupõe a escolha antecipada de um tipo particular de fontes, ou de alguma combinação destas, antes de realizar o levantamento de dados. Os astrônomos coletam primeiro todas as fontes dentro da sua gama de interesse e limitações observacionais, e só depois selecionam os diferentes tipos de fontes, ou seja, constroem os seus catálogos.
2. Está baseado no fato de que qualquer catálogo de um tipo específico de fonte é uma seleção entre todas as fontes desse tipo que em princípio são observáveis.
3. É fácil de implementar em simulações por computador.

## Imagens observáveis e observadas

1. O conjunto de imagens observáveis é

$$\mathcal{O} = \tilde{\mu}^{-1}(1) \cap \mathcal{U} .$$

Ele contém todas as imagens topológicas dos objetos em  $M(t_0)$  que, em princípio, podem ser observadas e registradas no levantamento.

2. O conjunto de imagens observadas por um levantamento ou catálogo é um subconjunto

$$\mathcal{C} \subset \mathcal{O} ,$$

pois devido a diversas limitações observacionais não é possível registrar todas as imagens que se encontram dentro do universo observado.

## **Hipóteses na construção dos catálogos**

1. Todos os objetos cósmicos são pontuais.
2. A visibilidade de cada objeto não diminui com a distância.
3. Todos os objetos possuem um tempo de vida longo, foram criados nos estágios iniciais do universo, e nenhum deles foi extinto até o presente momento.
4. Todos os objetos são co-móveis, isto é suas posições espaciais são fixas no tempo.

## Regras de construção

1. Limitações observacionais formuladas em termos de regras de seleção que descrevem como obter o catálogo  $\mathcal{C}$  a partir do conjunto das imagens observáveis  $\mathcal{O}$ .  
Exemplos:
  - (a) Seleção por limiar de luminosidade.
  - (b) Seleção por tempo de vida finito.
  - (c) Seleção por ocultação devido à linha de visão.
2. As regras de seleção, junto com a lei de distribuição dos objetos em  $M$ , são referidas como regras de construção de  $\mathcal{C}$ .
3. Regras de construção triviais:
  - (a) Distribuição homogênea de objetos em  $M$ , e
  - (b)  $\mathcal{C} = \mathcal{O}$ .

## Regras de seleção: Limiar de luminosidade

1. A luminosidade absoluta de qualquer objeto é uma quantidade finita, e a luminosidade aparente de qualquer objeto diminui com a distância.
2. Os aparelhos de medição possuem limitações no fluxo de luz que podem detectar.
3. Para implementar esta regra de seleção:
  - (a) Associe a cada objeto uma luminosidade absoluta.
  - (b) Calcule a luminosidade aparente de cada imagem.
  - (c) Fixe um limiar de luminosidade aparente ( $l_{lim}$ ).
  - (d) Uma imagem é registrada no catálogo apenas se a sua luminosidade aparente é maior que, ou igual a  $l_{lim}$ .

## **Regras de seleção: Tempo de vida finito**

1. Toda fonte cósmica considerada pontual é uma estrutura complexa que se formou em algum momento da evolução do universo, e não vai durar para sempre. Portanto toda fonte cósmica possui um tempo de vida finito.
  
2. Para implementar esta regra de seleção:
  - (a) Associe a cada objeto um tempo de vida e uma data de nascimento, determinando assim o seu segmento de vida.
  
  - (b) Uma imagem observável é registrada no catálogo se o seu segmento de vida intercepta o cone de luz observado.
  
3. Esta regra de seleção é necessária ao trabalhar com quasares, pois o tempo de vida estimado para estes objetos é da ordem de um milésimo da idade estimada do nosso Universo.

## **Regras de seleção: Ocultação por linha de visão**

1. Os objetos considerados pontuais são, na verdade, objetos extensos.
2. Segue-se que um objeto que esteja mais afastado que outro, mas na mesma linha de visão, poderá não ser observado, e portanto não será registrado num catálogo.
3. Para implementar esta regra de seleção:
  - (a) Atribui-se a cada objeto cósmico um perfil geométrico tridimensional (um elipsóide, por exemplo).
  - (b) Declara-se como não observável uma fonte que fique oculta por alguma outra.
  - (c) O critério de ocultação dependerá de parâmetros como um limiar de contraste de luminosidades, e algum modelo que simule a resolução angular do telescópio utilizado no levantamento.



## **Catálogos com imagens múltiplas**

## Catálogos com imagens múltiplas

1. Um levantamento de dados é profundo se o correspondente universo observado  $\mathcal{U}$  possui a propriedade que para o poliedro de Dirichlet  $P$  centrado numa imagem do observador, existem faces  $F$  e  $F'$ , identificadas por uma isometria  $g \in \Gamma$ , e tais que algumas regiões  $E \subset F$  e  $g(E) \subset F'$  estão no interior de  $\mathcal{U}$ .
2. Se  $M$  é multiplamente conexa e o levantamento é profundo,  $\mathcal{O}$  contém imagens múltiplas de alguns objetos cósmicos.
3. Se as limitações observacionais permitem o registro de algumas imagens múltiplas em  $\mathcal{C}$ , o catálogo contém informações sobre as periodicidades devidas ao grupo de recobrimento  $\Gamma$ , e portanto, sobre a topologia da variedade  $M$ .

## Catálogos com imagens múltiplas

São duas as condições independentes a serem satisfeitas para que exista uma quantidade suficiente de imagens múltiplas num catálogo, afim de que a topologia do espaço possa ser detectada.

1. O levantamento de dados deve ser profundo, de modo que no universo observado existam múltiplas imagens observáveis de objetos cósmicos.
2. As regras de seleção não devem ser muito restritivas de modo a suprimir o registro de imagens múltiplas em número suficiente para fazer possível a sua detecção.

## Pares de imagens correlacionadas

1. Cada par observado de imagens de um mesmo objeto está relacionado por uma isometria  $g \in \Gamma$ .
2. Estes pares de imagens são chamados coletivamente de  $\Gamma$ -**pares**.
3. Um  $g$ -par é qualquer par relacionado pela isometria  $g \in \Gamma$ .
4. Os  $\Gamma$ -pares no catálogo  $\mathcal{C}$  dão origem a correlações nas posições das imagens observadas.

## Identificação direta de $\Gamma$ -pares

A identificação direta de imagens múltiplas de um objeto cósmico em um catálogo real possui problemas práticos muito graves:

1. Duas imagens do mesmo objeto a diferentes distâncias do observador correspondem a distintos estágios na sua evolução. Como o mesmo objeto pode apresentar uma morfologia diferente em cada estágio evolutivo, a identificação direta de imagens múltiplas é impossível sem algum modelo adequado da evolução do tipo de objeto em consideração.
2. Duas imagens do mesmo objeto são observadas segundo orientações diferentes. Um objeto pode apresentar uma morfologia diferente de acordo ao ângulo de visão.
3. As regras de seleção podem impedir a observação de uma ou mais cópias de uma mesma fonte.

## Identificação estatística de $\Gamma$ -pares

1. Uma maneira de superar estas dificuldades é utilizar métodos estatísticos para detectar as correlações nas posições das fontes que surgem devido à distribuição (quase) periódica das imagens observadas num catálogo que possua imagens múltiplas.
2. O principal objetivo de qualquer abordagem estatística à topologia cósmica usando fontes discretas é o de desenvolver métodos que revelem estas correlações.
3. As correlações nas posições originão correlações de distâncias entre pares de fontes.

## **Topologia do espaço-tempo**

Consequência observável imediata de uma topologia não-trivial do espaço-tempo

**Possível existência de múltiplas imagens para cada objeto.**

Dificuldades para observar imagens topológicas

1. Imagens a diferentes distâncias aparecem em diferentes etapas de sua evolução.
2. Imagens múltiplas são vistas (geralmente) sob distintos ângulos de observação.
3. As regras de seleção podem impedir a observação de uma ou mais cópias de uma mesma fonte.