Medida de Fase por Intercorrelação

Recebemos um sinal adicionado de um ruído

$$r(t) = A\cos(\varpi\, t + \phi) + b(t) \qquad -\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2}$$

O ruído $b(t)$ representa os parasitas de origem diversas que perturbam o sinal. $b(t)$ é uma função aleatória centrada e branca, i.e. :

$$\mathrm{E[b(t)]} = 0$$
$$\gamma_{\mathrm{B}}(\tau) = N_0\,\delta(\tau) = E[b(t)\,b(t-\tau)]$$

1) Qual é a densidade espectral de potência (p.d.s.) de $b(t)$?

Para medir ϕ calculamos entre os instantes $-\frac{T}{2}, +\frac{T}{2}$ a função de intercorrelação $\gamma_{rs}(\tau)$ de $r(t)$ e de uma cópia do sinal esperado:

$$s(t) = \cos(\varpi\, t)$$
$$\gamma_{rs}(\tau) = \int_{-T/2}^{+T/2} r(t)\; s(t-\tau)\; d\tau$$

2) Mostre que:

$$\gamma_{rs}(\tau) = \frac{AT}{2}[\cos(\varpi\;\; \tau + \phi) + \delta\gamma_1(\tau)] + \delta\gamma_2(\tau)$$

Onde :

$\delta\gamma_1(\tau)$: termo proveniente do sinal devido a integração ser realizada sobre um número inteiro de períodos;

$\delta\gamma_2(\tau)$: termo proveniente do ruído.

3) Mostre que o termo $\delta\gamma_1(\tau)$ é pequeno se $\varpi\, T >> 1$, i.e. se calcularmos a intercorrelação sobre um número grande de períodos do sinal.

Atenção: de agora em diante vamos admitir que $\delta\gamma_1(\tau)$ =0

4) Estudo de $\delta\gamma_2(\tau)$:

Para um valor de τ fixo $\delta\gamma_2(\tau)$ é uma variável aleatória que iremos estudar os dois primeiros momentos. Mostre que:

4.1) O valor médio de $\delta\gamma_2(\tau)$ = $E[\delta\gamma_2(\tau)] = 0$

4.2) E que σ^2 = variância de $\delta\gamma_2(\tau)$ = $E[\delta\gamma_2(\tau)^2] = \frac{N_0 T}{2}$

Observação: podemos escrever $E[\delta\gamma_2(\tau)^2]$ da seguinte forma:

$$E[\delta\gamma_2(\tau)^2] = \int\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t)\,s(u)\;E[b(t)\;b(u)]\;dt\;du$$

5) Medida de ϕ

Seja τ_0 o valor de τ para que $\gamma_{rs}(\tau)$ se anula. Mostre que a fase medida neste caso se escreve como sendo:

$$\phi_M = \frac{\pi}{2} - \varpi\,\tau_0$$

Admitindo que $\delta\gamma_2(\tau_0)$ é pequeno, mostre que a fase medida ϕ_M se escreve como sendo:

$$\phi_M = \phi + \delta\phi$$

Onde $\delta\phi$ é uma variável aleatória. Calcular o valor médio, E[$\delta\phi$] e a variancia $\sigma^2_{\delta\phi}$ de $\delta\phi$.

6

O ruído $b(t)$ é suposto branco na banda $[-\frac{W}{2}, \frac{W}{2}]$:

$$\Gamma_B(\nu)\begin{cases} = N_0 & \text{para } |\nu| < \frac{W}{2} \\ = 0 & \text{para } |\nu| > \frac{W}{2} \end{cases}$$

$$\frac{W}{2} > \frac{\varpi}{2\pi} \text{ (freqüência do sinal).}$$

Definimos a relação sinal ruído como sendo:

$$R = \frac{\text{Potência média do Sinal}}{\text{Variância do Ruído}} = \frac{A^2}{2\,E[b(t)^2]}$$

Supondo válidas as formulas encontradas em 5 (dentro do caso do ruído branco com banda passante infinita), calcule $\sigma_{\delta\phi}$, o desvio padrão da medida, em função de R, e de W T (produto da banda passante do ruído pela duração do sinal).