



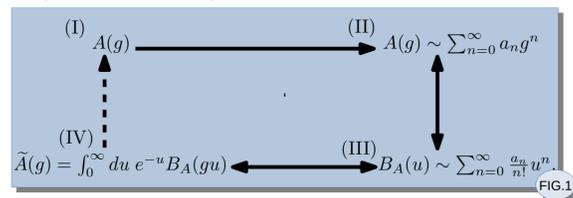
BOLSISTA:	Erich Monteiro Bailly Andersen Cavalcanti
E-MAIL:	erich@cbpf.br
SUPERVISOR:	Tobias Micklitz
TÍTULO DO PROJETO:	Aspectos não-perturbativos em teoria de campos aplicada à matéria condensada.

Resumo

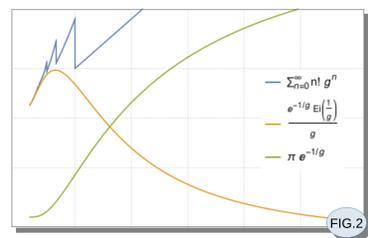
Utilizando um modelo formal (campo escalar com auto-interação interação quártica) investigamos a estrutura das singularidades do tipo renormalon quando o modelo é submetido a restrições espaciais (compactificações) e condições de contorno quasiperiódicas. Obtemos que, diferente do esperado, nem o tamanho das compactificações nem o número delas interfere na quantidade e posição dos polos. Somente os resíduos associados aos renormalons é influenciado. Indicamos que resultados reportados na literatura sobre cancelamento algébrico das singularidades do tipo renormalon ou surgimento de novas singularidades devem ser avaliados com cautela e parecem provir não de uma redução dimensional suave mas sim de uma aproximação de modos estáticos.

Introdução

O uso de métodos perturbativos em função de certo parâmetro (g , por exemplo) para tratar um problema difícil é tão antigo quanto a própria física. Entretanto, muitas vezes a série perturbativa não tem acesso a informações sobre os fenômenos não-perturbativos da teoria sob interesse. Isto pode ocorrer pois o valor de interesse do parâmetro g pode estar fora do raio de convergência da série ou – mais dramaticamente – pois a série perturbativa tem raio de convergência nulo e é assintótica. Usualmente, muitas séries perturbativas apresentam um crescimento fatorial nos seus coeficientes fazendo-as explicitamente divergentes. Assim, devemos entender a série assintótica como uma série formal (FIG.1 (II)) que atua como uma representação da solução exata (FIG.1 (I)). Uma metodologia tradicional para tratar a série perturbativa é utiliza o método de soma de Borel. Isto é, a série original (no plano físico do parâmetro g ; FIG.1(III)) é transportada para o plano de Borel (com o parâmetro u ; FIG.1 (III)). No plano de Borel a série ganha um controle fatorial e pode se tornar somável. Deste ponto, podemos realizar uma transformada inversa de Borel para retornar ao plano físico (FIG.1(IV)), caso essa operação seja bem definida teremos extraído uma resposta não-perturbativa da série perturbativa.



Entretanto, algumas fontes de divergência da série perturbativa podem aparecer no plano de Borel como singularidades no caminho de integração e nos impedem de realizar a transformada inversa de Borel, introduzindo ambiguidades devido à necessidade de escolher o caminho de integração. Consideremos, por exemplo, a FIG.2 em que é considerado o cenário onde o coeficiente se comporta como $n!$, teremos um polo no plano de Borel localizado em $u=1$. A curva azul representa o truncamento ótimo (no sentido de uma série assintótica de potência por Poincaré). A curva laranja é componente real da transformada inversa de Borel. A curva verde é a ambiguidade introduzida pela escolha de contorno.

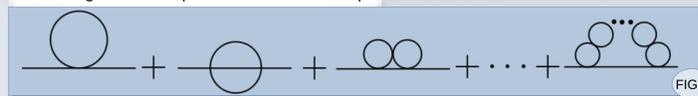


Algumas fontes familiares de divergências em modelos de teoria de campo são os instantons (estruturas semi-clássicas que são relacionadas à proliferação de diagramas de Feynman) e os renormalons (relacionados a divergências ultravioleta ou infravermelha no momento interno de integração de alguns conjuntos de diagramas de Feynman, como a cadeia de bolhas – ver FIG.3). É crucial, para extração de aspectos não-perturbativos de modelos em teoria de campos, o entendimento das singularidades do tipo instanton e tipo renormalon. Uma proposta comum para elucidar a questão é o uso de modelos solúveis (entretanto, existe poucos modelos solúveis com renormalons, ver MARINO:2020) ou a existência de um cenário no qual a singularidade dos renormalons é removida. Nesse sentido, tem sido investigado nas duas últimas décadas o uso de modelos em espaços com restrição espacial. Uma proposta é que em modelos com restrição espacial a teoria desenvolve estruturas semi-clássicas, os fractons, e a composição de fractons (bions e moléculas de bions) são responsáveis pelo cancelamento das ambiguidades ARGYRES:2012, UNSAL:2020. Essa proposta tem sido criticada recentemente devido à indicação de existência de novos polos de renormalons cujas ambiguidades não são compensadas pelos bions MORIKAWA:2020. Uma segunda proposta é que no limite de tamanhos muito pequenos a singularidade de renormalons desaparece espontaneamente devido a uma redução dimensional UNSAL:2015, ASHIE:2020. Em ambos cenários é necessário o entendimento de como a estrutura de singularidade dos renormalons se comporta com respeito ao tamanho de compactificação. Além disto, novas propostas introduzindo mais

compactificações introduzem a necessidade de investigar a dependência com um número maior de dimensões compactadas. Em um trabalho anterior sobre redução dimensional (CAVALCANTI:2019) foi mostrada a importância da escolha da condição de contorno quando se investiga este aspecto. Dentro desse contexto uma primeira investigação consiste em adotar um modelo formal que apresente as singularidades do tipo renormalon e avaliar a dependência com o número d de compactificações, o tamanho das compactificações e as condições de contorno.

Modelo formal – Campo escalar auto-interagente

Assumiremos um campo escalar auto-interagente e sem sabor ($N=1$). O conjunto de diagramas a ser investigado será a soma de cadeia de bolhas, que é uma contribuição tradicional (BENEKE:1999) para obtenção de renormalons, veja FIG.3. Outros conjuntos de diagramas são possíveis mas serão apresentados em outro momento.



O problema pode ser organizado do seguinte modo: avaliar a amplitude de cada “bolha” (EQ.1) e então compor uma cadeia de k -bolhas (EQ.2). A amplitude da bolha compactificada é obtida introduzindo a parametrização de Feynman e resolvendo a integração por regularização dimensional. Sendo D o número completo de dimensões, d o número de dimensões compactificadas, L_i tamanho de cada compactificação, θ o parâmetro da condição de contorno ($\theta=0$ para periódico, $\theta=1$ para antiperiódico), n_i^q o modo associado ao momento q , P é o momentum externo à cadeia de bolhas e ℓ é o momentum que percorre a cadeia de bolhas. Γ é função gama. Para avaliar a cadeia de k -bolhas é necessário renormalizar a amplitude, utilizaremos o procedimento de subtração de BPHZ (A notação \tilde{A} representa que a quantidade A foi renormalizada). Para investigar a singularidade somamos as cadeias de bolhas no plano de Borel, gerando a EQ.3. Essas três equações representam o caso geral. Para facilitar a visualização, consideremos o cenário com somente uma compactificação.

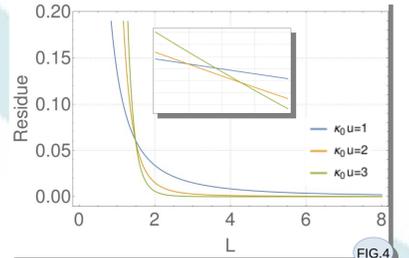
Cenário com $d=1$

Neste caso existe apenas uma soma na EQ.1, que pode ser realizada diretamente, resultando na EQ.5. Dessa expressão subtrairemos (aplicando BPHZ) a componente do bulk ($L \rightarrow \infty$) com momentum nulo ($\ell=n=0$). Para investigar o comportamento assintótico podemos notar que na EQ.5 o argumento da função de Bessel modificada do segundo tipo (K_0) poderá sempre ser tomando como grande, independentemente do valor do tamanho de compactificação L . Próximo ao bulk ($L \rightarrow \infty$) o termo $1/L$ é dominante, próximo à redução dimensional ($L \rightarrow 0$) o termo $2\pi n^\ell$ é dominante. Assim, é podemos utilizar a expansão assintótica da função de Bessel para argumentos grandes e, aplicando o método de Laplace, o comportamento dominante da bolha é dado pelo EQ.6, válida para todo regime de tamanhos. Este é um ponto crucial, em um outro cenário no qual o argumento da função de Bessel tende a zero próximo à redução dimensional (como apresentado por ASHIE:2020) faz-se necessário uma expansão para argumentos pequenos da função de Bessel, o que provoca um cancelamento algébrico da contribuição logarítmica. No nosso cenário isso é atingido apenas se nos restringirmos ao modo estático ($n=0$). Deve ser notado que a primeira correção na EQ.6 é anulada para o caso antiperiódico ($\theta=1$), isto não é uma ilusão da expressão assintótica, realmente existe um cancelamento para esse regime. Substituindo a EQ.6 na EQ.3 e avaliando a integral-soma com cautela extraímos a EQ.7. Este ponto é sensível pois uma pequena alteração no comportamento logarítmico modifica a estrutura de polos. Apesar de que $\ln(\ell/x) \sim \ln|q|$ para valores grande de ℓ , a integração com respeito a ℓ de $\ell^2(\ell^2+x)^{-3+u}$ e $\ell^{2+u}(\ell^2+x)^{-3}$ produzem estruturas de polos diferentes. Por este motivo mantemos o fator ML explícito mesmo sendo uma contribuição pequena (atua como um cutoff infravermelho natural). A partir da EQ.7 podemos extrair que a estrutura de singularidades no plano de Borel consiste em um conjunto infinito contável de polos localizados nos inteiros positivos, $\kappa_0 u = j \in \mathbb{N}^+$ sendo κ_0 dado por $g/(32\pi^2)$.

O resíduo dos polos vai rapidamente a zero no limite do bulk, recuperando o resultado de um número finito de renormalons para essa situação. Com respeito ao valor absoluto do resíduo é observado um ordenamento no qual para tamanhos grandes quanto mais distante da origem menor o valor do resíduo. Enquanto que para tamanhos pequenos, quanto mais próximo da origem menor o valor do resíduo. Isso pode ser visto com clareza na FIG.4 (assumindo aqui $M=1$, $\theta=1$).

Caso geral : qualquer d

$$B_k^d(\ell; \omega_{n,\alpha}^d) \sim \frac{1}{8\pi^2} - \frac{1}{16\pi^2} \ln \left(\frac{\ell^2}{M^2} + \sum_{j=1}^d \frac{(2\pi n_j^\ell + \pi \theta_j)^2}{M^2 L_j^2} \right) + \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{\ell^2 + \sum_{j=1}^d \frac{(2\pi n_j^\ell + \pi \theta_j)^2}{L_j^2}} \left\{ \sum_{i=1}^d \frac{\cos(\pi \theta_i) + \cos(2\pi \theta_i)}{L_i^2} \Gamma \left(\frac{3}{2}, ML_i \right) + 2 \sum_{i=1}^d \sum_{i_1=1}^d \frac{\cos(\pi \theta_{i_1}) \cos(\pi \theta_{i_2}) + \cos(2\pi \theta_{i_1}) \cos(2\pi \theta_{i_2})}{L_{i_1}^2 + L_{i_2}^2} \Gamma \left(\frac{3}{2}, M \sqrt{L_{i_1}^2 + L_{i_2}^2} \right) + \dots + 2^{d-1} \frac{\prod_{i=1}^d \cos(\pi \theta_i) + \prod_{i=1}^d \cos(2\pi \theta_i)}{\sum_{i=1}^d L_i^2} \Gamma \left(\frac{3}{2}, M \sqrt{\sum_{i=1}^d L_i^2} \right) \right\}$$



para todo intervalo de valores para os tamanhos de compactificação pois sempre poderemos tomar a expansão para argumentos grandes da função modificada de Bessel do segundo tipo. A bolha, nesse cenário, é dada pela EQ.8. Utilizando a EQ.8 podemos calcular a soma dos diagramas do tipo cadeia de bolhas com d compactificações espaciais no plano de Borel (primeiro renormalizamos a EQ.8 e depois computamos a integral-soma como indicado na EQ.3). Apesar de levemente mais intrincado, obtemos ao fim a mesma estrutura de singularidades do caso simplificado ($d=1$). Isto é, observamos a presença de um conjunto infinito contável de polos localizados nos inteiros positivos. Somente os resíduos que são modificados e dependem diretamente no número de compactificações.

Conclusões Parciais

Estrutura de singularidades:

- Renormalons associados à cadeia de bolhas estão localizados nos inteiros positivos do plano de Borel.
 - Estrutura não é modificada pelo tamanho da compactificação nem pelo número de compactificações.
 - Não é observado cancelamento algébrico de renormalons para redução dimensional suave ($L \rightarrow 0$). O cancelamento é recuperado somente se nos restringirmos aos modos estáticos.
- Resíduos dos polos carregam dependência com os tamanhos de compactificação, número de dimensões compactificadas e condição de contorno.
 - Para algumas escolhas específicas o resíduo pode ser nulo, como o caso antiperiódico.
- Indicamos que a estrutura de singularidade deve ser avaliada com cautela, aproximações brutas podem modificar completamente o número e posição dos polos. Isso exige que tomemos com olhar crítico todo resultado que indique surgimento de novos polos pois podem ser consequência não do modelo mas da aproximação utilizada.
- A independência do número e posição dos polos com respeito ao tamanho da compactificação ou o número de compactificações é um resultado dependente do modelo. Por exemplo, no caso apresentado por ASHIE:2020, para QCD(adj) com uma compactificação espacial, ocorre uma distinção explícita entre tamanhos grandes e pequenos, sendo que para tamanhos pequenos o comportamento logarítmico é destruído (e consequentemente os renormalons desaparecem).

Referências

ANBER:2015; M. M. Anber and T. Sulejmanpasic, *JHEP* **01**, 139 (2015), [arXiv:1410.0121 \[hep-th\]](#).
 ARGYRES:2012; P. C. Argyres and M. Unsai, *JHEP* **08**, 063 (2012), [arXiv:1206.1890 \[hep-th\]](#)
 ASHIE:2020; M. Ashie et al, *PTEP* **2020**, 093B02 (2020), [arXiv:2005.07407 \[hep-th\]](#)
 BENEKE:1999; M. Beneke, *Phys. Rept.* **317**, 1 (1999), [arXiv:hep-ph/9807443](#).
 CAVALCANTI:2018; E. Cavalcanti et al, *Phys. Rev. D* **98**, 045013 (2018), [arXiv:1804.10708 \[hep-th\]](#).
 CAVALCANTI:2019; E. Cavalcanti et al, *Phys. Rev. D* **100**, 025008 (2019), [arXiv:1904.10833 \[hep-th\]](#).
 ELIZALDE:2012; E. Elizalde, Ten physical applications of spectral zeta functions, Vol. 855 (2012)
 MARINO:2020; M. Mariño, T. Reis, *arXiv:2006.05131 [hep-th]*.
 MORIKAWA:2020; O. Morikawa and H. Takaura, *Phys. Lett. B* **807**, 135570 (2020), [arXiv:2003.04759 \[hep-th\]](#).
 UNSAL:2020; M. Unsai, [arXiv:2007.03880 \[hep-th\]](#).